

POLITECNICO DI TORINO

Giuseppe Vecchi
Paola Pirinoli

Appunti su **Irradiazione e Antenne**

Versione 2.1.0, A.A. 2000/2001



Queste sono note interne del corso ad uso didattico. Ne sono pertanto tassativamente vietate la diffusione, l'uso e la riproduzione al di fuori degli ambiti istituzionali dei corsi di Elettromagnetismo Applicato del Politecnico di Torino, e comunque non espressamente autorizzati dall'autore.

Queste note interne NON possono essere distribuite SENZA questa copertina.

Queste note sono basate sugli appunti dalle lezioni sull'Irradiazione e la teoria elementare delle Antenne tenute al Politecnico di Torino dall'autore. Esse hanno l'obiettivo di fare da supporto alla didattica, ovvero di integrare gli appunti presi a lezione.

Questa versione sostituisce completamente le versioni precedenti di questi appunti, che non dovrebbero più venire usate e distribuite.

RINGRAZIAMENTI

Desideriamo ringraziare gli studenti che ci hanno aiutato nella stesura di queste note.

Giuseppe Vecchi, Paola Pirinoli
Febbraio 2001

Indice

1	Introduzione	7
1.1	Introduzione qualitativa alle antenne	7
1.2	Tipi di antenne	8
1.2.1	Antenne a filo	8
1.2.2	Antenne ad apertura	8
1.2.3	Antenne a riflettore	8
1.2.4	Antenne stampate	9
1.2.5	Antenne a schiera	10
1.2.6	Antenne a lente	10
1.3	Generazione nello spazio libero e teorema di equivalenza	11
1.4	Principale utilizzo delle bande in frequenza	14
2	Irradiazione nello spazio libero	17
2.1	Problema-guida: equazioni di una linea indefinita con sorgenti	17
2.2	Il problema dell'irradiazione nello spazio libero	19
2.2.1	Calcolo della funzione di Green spettrale	21
2.2.2	Calcolo della funzione di Green spaziale	24
2.2.3	Funzione di Helmholtz e onde sferiche	25
2.2.4	Caratterizzazione di lontananza e vicinanza dalle sorgenti	27
2.2.5	Integrali di irradiazione	28
2.3	Dalle equazioni di campo vicino alle equazioni di campo quasi-statico	29
2.4	Formulazione del campo elettromagnetico in termini di potenziali	34
2.5	Forme approssimate del campo di una sorgente estesa	35
2.5.1	Irradiazione di una sorgente generica e regione di Fraunhofer	35
2.5.2	Campo lontano	40
2.5.3	Sorgente piccola e dipolo elementare	41
2.5.4	Proprietà di direttività e vettori di irradiazione	42
2.5.5	Relazione di impedenza e vettore di Poynting	43
2.5.6	Approssimazione locale del campo irradiato	45
2.5.7	Diagramma di irradiazione e polarizzazione del campo	46
2.5.8	Riassunto dei risultati ottenuti nei paragrafi 2.5	49
2.6	Irradiazione di un dipolo elementare e questioni energetiche	50
2.6.1	Campo vicino per un dipolo elementare	50
2.6.2	Campo lontano per un dipolo elementare	52
2.6.3	Considerazioni energetiche	55

3	L'antenna in trasmissione	59
3.1	Parametri fondamentali delle antenne	59
3.2	Caratterizzazione di un'antenna verso lo spazio libero	59
3.2.1	Direttività e guadagno	59
3.2.2	Antenne con due morsetti e altezza efficace	62
3.2.3	Diagramma di irradiazione isotropico, direzionale e omnidirezionale . . .	66
3.2.4	Piani principali	66
4	L'antenna in ricezione e reciprocità	69
4.1	Antenne in ricezione	69
4.1.1	Circuito equivalente e parametri caratteristici per un'antenna in ricezione	70
4.1.2	Potenza ricevuta	72
4.2	Reciprocità	75
4.2.1	Introduzione alla reciprocità	75
4.2.2	Lemma di Lorentz	76
4.2.3	Versione integrale del Lemma di Lorentz	77
4.2.4	Forma forte del teorema di reciprocità	78
4.2.5	Equivalenza di un'antenna in RX e in TX	80
5	Antenne filari	85
5.1	Introduzione alle antenne filari	85
5.2	Antenne a dipolo elettrico	91
5.2.1	Linea di trasmissione biconica e dipolo a $\lambda/2$	91
5.2.2	Dipolo corto e dipolo a $\lambda/2$: confronto	95
6	Antenne ad apertura	105
6.1	Introduzione	105
6.2	Irradiazione da apertura	109
6.3	Irradiazione di un'antenna a tromba con apertura rettangolare	113
6.3.1	Calcolo del campo	113
6.3.2	Analisi del campo irradiato	115
6.3.3	"Tapering"	118
6.3.4	"Errore di fase" sull'apertura	119
6.3.5	Diagramma d'irradiazione e interferenza di fase	121
7	Schiere di antenne	127
7.1	Irradiazione da una schiera di antenne	127
7.2	Schiera lineare uniforme a sfasamento costante	129
7.2.1	Schiere <i>broadside</i> ed <i>endfire</i>	133
7.2.2	<i>Grating lobes</i>	134
7.3	Lobi secondari e schiere non uniformi	137
7.4	Reti di alimentazione	144
7.4.1	Alimentazione ad albero (<i>corporate, equal-length</i>)	144
7.4.2	Alimentazione in cascata (Linea risonante)	147
7.5	Schiere planari: caso cartesiano separabile	150
7.5.1	Esempio di rete di alimentazione	153

7.5.2	Esempi di antenne equivalenti a schiere planari separabili	153
8	Bilancio energetico in un collegamento radio in spazio libero	155
8.1	Equazione della trasmissione (formula di Friis)	155
8.2	Adattamento di polarizzazione	158
8.2.1	Direzione di osservazione e incidenza	158
8.2.2	Polarizzazione non lineare	158
8.3	Effetti del rumore in un collegamento radio	161
8.3.1	Rumore nel sistema di comunicazione via radio	161
8.3.2	Potenza di rumore in ingresso all'antenna	162
8.3.3	Bilancio energetico di tratta (link-budget)	167
9	Collegamento radio in presenza di terreno piano	169
9.1	Riflessione da terreno conduttore	169
9.1.1	Campo irradiato in presenza di terreno	170
9.1.2	Ricezione	173
9.2	Terreno non conduttore	174
10	Introduzione al radar	177
10.1	Il radar	177
10.1.1	Caratteristiche generali dei sistemi radar	177
10.1.2	Elementi costitutivi di un sistema radar	178
10.1.3	Cenni storici sulla nascita, lo sviluppo e l'evoluzione del radar	179
10.2	Tipologie fondamentali di radar	180
10.2.1	Effetto Doppler e applicazioni radar	180
10.3	Le frequenze del radar	183
10.4	Equazione del radar e radar cross section (RCS)	183
10.5	Esempio di RCS: sfera conduttrice	187
11	Legame con le equazioni dei circuiti	189
11.1	Derivazione delle equazioni di Kirchhoff dalle equazioni di Maxwell	189
11.2	Caratterizzazione di un N -polo	193
11.3	Bipoli e leggi circuitali ad alta frequenza	194
11.3.1	Strutture guidanti TEM	195
11.3.2	Antenna con due morsetti fisici	196
A	Relazione tra i sistemi di coordinate cartesiano e sferico	207
B	Un'introduzione al calcolo diadico	209
C	Calcolo di $g_o(z)$ con il metodo dei residui	213
D	Calcolo della funzione di Green scalare	217
E	Forma esplicita della funzione diadica di Green	221
E.1	Valutazione della funzione di Green tramite espressioni integro-differenziali . . .	221
E.2	Valutazione mediante calcolo diretto (differenziale)	224

F	Potenza di segnali stazionari in senso lato	227
G	Brillanza	229
H	Termini tecnici	233

1

Introduzione

1.1 Introduzione qualitativa alle antenne

Dal punto di vista di un sistema di trasmissione un'*antenna* è un elemento di interfaccia fra una parte circuitale e lo spazio libero, sia in trasmissione che in ricezione.

In trasmissione (TX) dell'energia guidata (cioè un campo elettromagnetico confinato) giunge all'antenna, la quale si occupa di irradiare tale energia nello spazio libero con determinate caratteristiche di direttività; in ricezione (RX) invece l'antenna permette all'energia proveniente dallo spazio di fluire in una struttura guidante e di giungere alla parte circuitale. Per essere in condizioni ottime occorre che ci sia adattamento alla parte circuitale e che l'energia venga irradiata nello spazio libero in modo efficiente, cioè in direzione e polarizzazione adeguate.

Per evidenziare qualitativamente la caratteristica di direttività di un'antenna si pensi ad una parabola (esempio di antenna a riflettore). Il principio di funzionamento è analogo a quello del “fanale” di un'auto: un fanale ha il compito di illuminare una porzione limitata di spazio, a spese di un'altra porzione di spazio che però non interessa illuminare (viceversa una lampadina garantisce una illuminazione quasi omnidirezionale). Se una lampada è posta nel fuoco di un paraboloide i raggi luminosi (ottica geometrica) si riflettono sulla superficie interna del paraboloide stesso ed assumono poi la direzione parallela all'asse ottico principale dello specchio; in questo modo si riesce ad indirizzare il fascio di luce in una direzione ben precisa. Per frequenze “alte” il comportamento di un'antenna parabolica è analogo a quello del fanale. Inoltre la proprietà del campo di riscaldamento delle dimensioni con la frequenza permette di ottenere le stesse caratteristiche di irradiazione a frequenze inferiori aumentando le dimensioni dell'oggetto che irradia.

L'esempio della parabola permette di capire che le antenne possono accrescere l'energia irradiata in alcune parti dello spazio, ma a discapito dello spazio in cui non si vuole irradiare.

Nel seguito inizieremo a occuparci di antenne in trasmissione, lo studio delle quali appare più semplice rispetto a quello delle antenne in ricezione. Infatti tale studio si può separare, almeno approssimativamente, dal calcolo dei campi che si generano sull'antenna quando ai suoi capi viene, ad esempio, imposta una certa tensione (risoluzione delle equazioni di Maxwell in presenza di un termine forzante); questo calcolo rappresenta un problema molto oneroso dal punto di vista analitico e computazionale. D'altra parte vedremo che esiste un importante teorema di reciprocità, che ci consentirà di stabilire una precisa equivalenza tra il comportamento di un'antenna in ricezione e quello in trasmissione.

1.2 Tipi di antenne

Elenchiamo i tipi più comuni di antenna, attualmente in uso.

1.2.1 Antenne a filo

Se una distribuzione di corrente è definita su di un supporto assimilabile geometricamente ad una linea, detto supporto prende il nome di *antenna a filo* (detta anche *antenna filare* o *lineica*). Vi sono vari tipi di antenne a filo, i cui elementi costitutivi sono in genere il dipolo elettrico (costituito da un filo metallico dritto) ed il dipolo magnetico (un filo metallico avvolto a formare una spira (*loop*)).

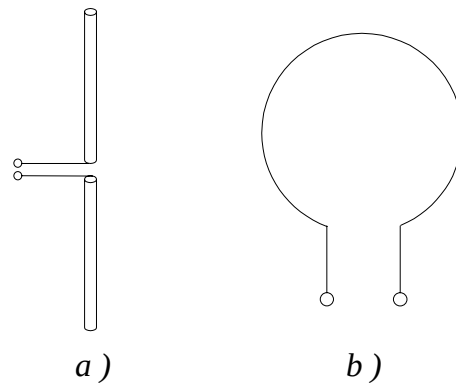


Figura 1.1. Esempi di antenne filari: a) un dipolo elettrico, b) una spira.

1.2.2 Antenne ad apertura

Sono una classe di antenne definibili per la distribuzione di campo elettromagnetico su di una superficie (ovvero una regione bidimensionale) detta *apertura*, ottenuta in genere alla terminazione di guide d'onda di vario tipo.

Questo tipo di antenna è oggi molto diffuso a causa della crescente domanda di antenne sofisticate per frequenze di funzionamento superiori al GHz (gamma delle microonde); sono utilizzabili per applicazioni terrestri ed aeronautiche perchè possono essere collegate a strutture meccaniche di varia natura, trovano inoltre impiego per l'alimentazione di antenne a riflettore (*feeder* o *illuminatore*). In aggiunta l'apertura irradiante può essere protetta dall'ambiente esterno con speciali coperture dielettriche (*radome*).

1.2.3 Antenne a riflettore

Le antenne a riflettore costituiscono una vasta classe di antenne, di solito impiegate al di sopra del GHz, ma talvolta anche al di sotto (qualche centinaio di MHz), il cui campo irradiato è essenzialmente quello diffratto da una superficie metallica (il *riflettore*) illuminata da una sorgente primaria (l'*illuminatore*, in genere costituito da una antenna ad apertura). Il campo diffratto

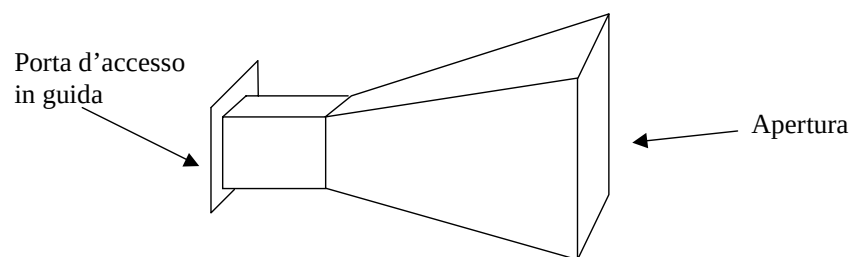


Figura 1.2. Esempio di antenna ad apertura: antenna a tromba.

dal riflettore è spesso indicato come campo secondario. Esistono anche dei sistemi d'antenna che impiegano due (o più) riflettori, dette *antenne a doppio riflettore* con caratteristiche di maggiore efficienza e prestazioni.

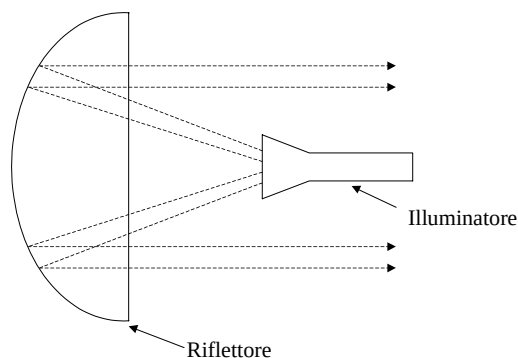


Figura 1.3. Esempio di antenna a riflettore.

1.2.4 Antenne stampate

Sono antenne di sviluppo relativamente recente, divenute comuni a partire dagli anni 70. Sono caratterizzate da una struttura metallica irradiante (*patch*) separata da un piano di massa tramite uno o più strati dielettrici, detti *substrati*, ed eventualmente da un ulteriore strato di copertura posto al di sopra (detto *superstrato*).

La forma del patch impiegata varia a seconda delle applicazioni; tra le forme più comuni (in particolare nelle prime applicazioni) vi è la forma quadrata o rettangolare, ma si incontrano anche elementi circolari, anulari o altro ancora. Sono antenne di facile fabbricazione e basso costo, inoltre sono adattabili a superfici planari e non; tuttavia, specie per le applicazioni più complesse, sono di difficile progettazione.



Figura 1.4. Esempio di antenna in microstriscia.

1.2.5 Antenne a schiera

Si definisce *schiera* un insieme di radiatori disposti nello spazio con un certo ordine, al fine di avere un sistema irradiante con forte direttività o con particolari caratteristiche del diagramma d'irradiazione. Si possono avere schiere a una, due o tre dimensioni a seconda che i radiatori siano disposti lungo una linea, su una superficie, od in un volume.

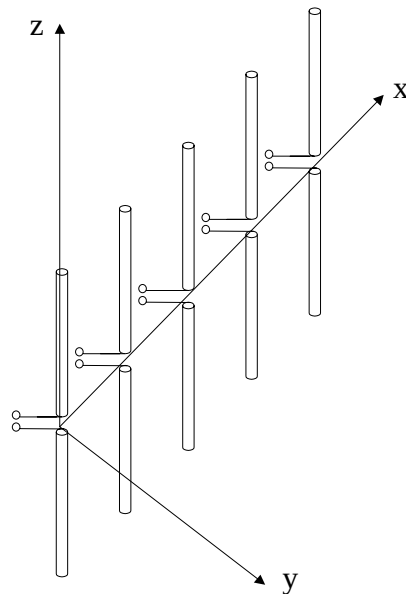


Figura 1.5. Esempio di schiera: schiera di antenne a dipolo elettrico.

1.2.6 Antenne a lente

Le lenti sono impiegate specialmente per collimare un campo elettromagnetico incidente divergente per impedirne la diffusione in direzioni indesiderate. Scegliendo opportunamente la configurazione geometrica ed adottando dei materiali opportuni, le antenne a lente permettono di trasformare un campo incidente divergente in un'onda piana. Sono antenne impiegate a frequenze elevate perché le loro dimensioni e peso divengono eccessivi a frequenze basse.

1.3 Generazione nello spazio libero e teorema di equivalenza

L'analisi del problema elettromagnetico è basata sulla soluzione delle equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza, con opportune sorgenti e condizioni al contorno. Queste ultime dovrebbero in teoria tenere conto di ogni singolo oggetto che può influenzare la propagazione, ma ciò in pratica non è realizzabile a causa del grandissimo numero di elementi che si frappongono sulla linea del collegamento. Per semplificare il problema si può tenere conto del fatto che tutte le distanze, per come sono formulate le equazioni, vengono misurate in lunghezze d'onda; tutto ciò che dista dall'antenna diversi multipli della lunghezza d'onda influisce in modo trascurabile sul dispositivo (tipicamente un'antenna) che genera il campo (quindi per esempio lavorando ad una frequenza di 10 GHz la lunghezza d'onda risulta 3 cm e tutto ciò che si trova oltre una trentina di centimetri dalla sorgente risulta pertanto trascurabile nel senso detto). È quindi usuale semplificare il problema considerando che la generazione dell'onda elettromagnetica avvenga nello spazio libero o vuoto (*free space*) e che gli eventuali oggetti che si trovano sul percorso di propagazione diano origine a fenomeni di riflessione, rifrazione e diffrazione delle onde così generate che vengono considerati durante la ricezione del segnale. Operando in questo modo, in pratica, le condizioni al contorno “spariscono” dal problema (o più correttamente vengono rimosse all'infinito). La generazione dell'onda elettromagnetica avviene tramite delle sorgenti da cui si ricava il campo, mentre il problema della ricezione è più complicato, ma verrà trattato in maniera del tutto simmetrica grazie al teorema di reciprocità. Rimane da trattare il problema di cosa siano le sorgenti da impiegare nelle equazioni di Maxwell. L'elemento preposto alla ricezione ed alla trasmissione delle onde radio è l'antenna; essa è un oggetto di interfaccia in quanto fa da tramite tra lo spazio libero e la circuiteria che lo alimenta o ne ricava il segnale: l'antenna è l'interfaccia tra la propagazione libera e la propagazione guidata. La “sorgente” è in pratica rappresentata da un generatore di tensione o di corrente posto ai morsetti di ingresso dell'antenna di cui si conosce l'impedenza d'ingresso. Nelle equazioni di Maxwell però non appaiono nè generatori, nè tantomeno si prende in considerazione l'impedenza d'ingresso dell'antenna; inoltre, l'antenna stessa è un oggetto materiale su cui dovrebbero essere imposte condizioni al contorno. Risulta pertanto di fondamentale importanza il teorema di equivalenza grazie al quale si riuscirà a mettere in relazione il generatore fisico con i termini di sorgente $\underline{J}_{es}$ e $\underline{J}_{ms}$ che compaiono nelle equazioni di Maxwell. Consideriamo una struttura arbitrariamente complicata e una superficie arbitraria Σ che racchiuda la struttura, sostituiamo tutto ciò che è interno ad essa con delle sorgenti superficiali equivalenti poste sulla superficie stessa (Fig. 1.6). Specializzato al nostro caso, il teorema di equivalenza¹ afferma appunto che il campo elettromagnetico in un generico punto esterno a Σ non cambia se si rimuove ciò che è interno alla superficie (ovvero lo si sostituisce con il vuoto) e si pongono delle correnti superficiali su Σ definite da:

$$\begin{cases} \underline{J}_{es} = \hat{n} \times \underline{H}|_{\Sigma} \\ \underline{J}_{ms} = -\hat{n} \times \underline{E}|_{\Sigma} \end{cases} \quad (1.1)$$

¹ Consultare anche P.Savi, R.Zich., *Appunti di Campi Elettromagnetici*, Politecnico di Torino, 1998-1999, cap 2.5 .

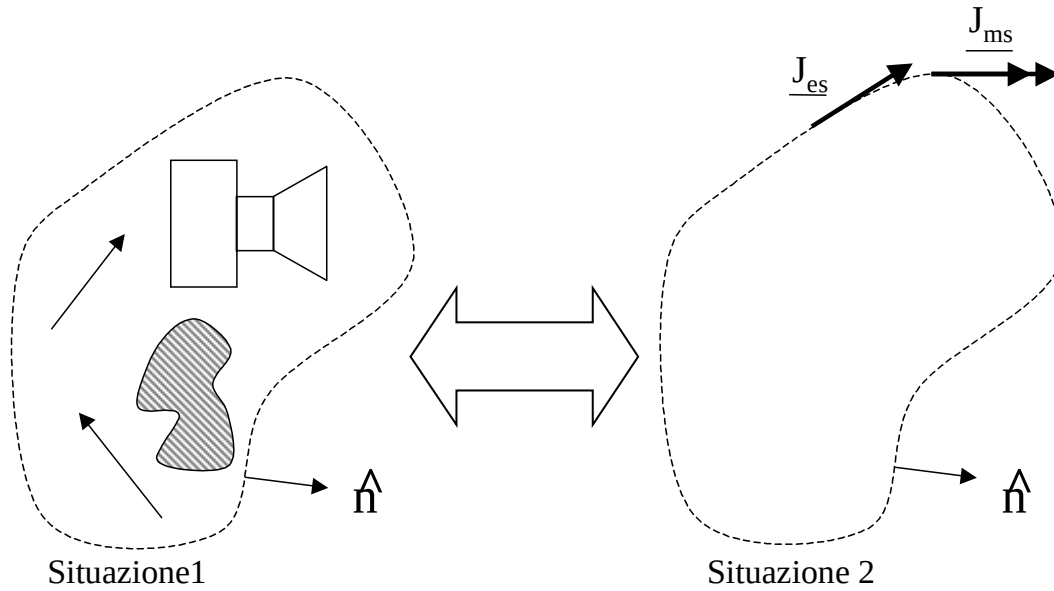


Figura 1.6. Superficie con sorgenti equivalenti

Con riferimento alla Fig. 1.6 il teorema di equivalenza afferma in pratica che risolvere il problema elettromagnetico nella situazione 1 è equivalente a risolvere il problema nella situazione 2, in cui si è sostituita la parte circuitale con una distribuzione di correnti elettriche e magnetiche sulla superficie Σ . Il seguente esempio di applicazione pratica del teorema di equivalenza può chiarire il concetto: consideriamo un'antenna a dipolo alimentata da un generatore (Fig. 1.7) e applichiamo il teorema di equivalenza con una superficie Σ “appoggiata” sul dipolo, come in Fig. 1.8. A stretto rigore anche la struttura fisica che racchiude il generatore andrebbe considerata; per semplicità ci concentriamo sull'antenna e trascuriamo tale struttura. Se il metallo può essere considerato un conduttore elettrico perfetto (PEC) si ha (condizione al contorno):

$$-\hat{n} \times \underline{E}|_{\Sigma} = 0 \quad (1.2)$$

e quindi:

$$\underline{J}_{ms} = 0 \quad (1.3)$$

Cioè le correnti magnetiche sono nulle e rimangono da prendere in considerazione ai fini del problema dell'irradiazione soltanto le correnti elettriche. È bene notare che l'applicazione del teorema di equivalenza non risolve il problema ma lo riformula in una forma più trattabile dal punto di vista analitico e numerico. Infatti, le correnti equivalenti sono incognite, e non sono altro che i campi sulle strutture: la loro determinazione quindi si riduce alla soluzione del medesimo problema di valori al contorno da cui si era partiti. Tuttavia, la forma ottenuta consente di calcolare il campo prodotto dalle sorgenti equivalenti se esse sono note. Vedremo nel seguito che esistono varie considerazioni fisiche per dare una forma approssimata a tali correnti per le classi più semplici di antenne. Il calcolo esplicito e rigoroso di esse va al di là degli scopi di questa trattazione. Da questo esempio traspare l'importanza del teorema

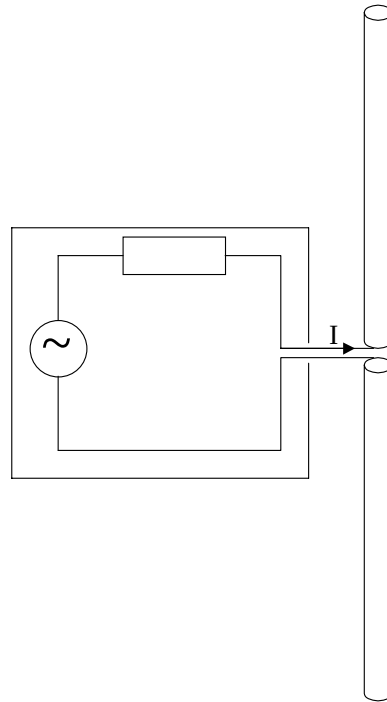


Figura 1.7. Antenna a dipolo collegata ad un alimentatore

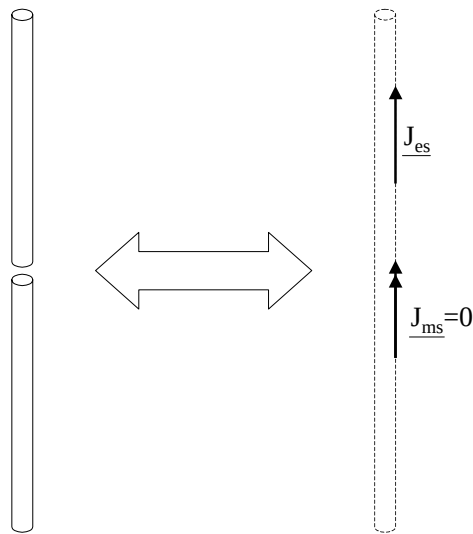


Figura 1.8. Sorgenti equivalenti per un'antenna a dipolo

di equivalenza: infatti siamo riusciti a legare la parte circuitale con le sorgenti equivalenti; queste ultime risulteranno calcolabili o approssimabili in base alla struttura dell'antenna e nota l'alimentazione di quest'ultima.

Una volta note $\underline{J}_{es}$ e $\underline{J}_{ms}$ il problema fondamentale da risolvere è dunque quello del campo generato da esse, ovvero la soluzione delle equazioni di Maxwell in spazio libero con sorgenti assegnate

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{H} = j\omega\epsilon\underline{E} + \underline{J}_e \\ -\nabla \times \underline{E} = j\omega\mu\underline{H} + \underline{J}_m \end{cases} \quad (1.4)$$

in cui μ ed ϵ non hanno natura né diadica né vettoriale, ma sono delle costanti in quanto il mezzo in cui avviene la propagazione è lineare². La tecnica di soluzione è basata sulla presenza di un mezzo omogeneo invariante per traslazione e infinitamente esteso; si useranno quindi le trasformate di Fourier per algebrizzare le derivate (spaziali) che compaiono nelle (1.4). Questo si chiama abitualmente *problema dell'irradiazione* che verrà affrontato nel Cap. 2.

1.4 Principale utilizzo delle bande in frequenza

Nella tabella in Fig. 1.1. vengono riassunte le principali definizioni delle bande in frequenza che vengono comunemente utilizzate e il servizio che tipicamente viene fornito lavorando in tali bande. Le microonde coprono un intervallo compreso tra 500 MHz fino ad oltre 40 GHz. Questo intervallo è suddiviso in diverse bande definite tramite delle lettere. Nella tabella in Fig. 1.2 vengono elencate le definizioni di tali bande. Da notare che la vecchia designazione delle lettere non coincide con quella nuova: quella più vecchia fu stabilita durante la metà degli anni 40 ed è ancor oggi in uso.

²Sulla natura di μ ed ϵ consultare P.Savi, R.Zich, *Appunti di Campi Elettromagnetici*, Politecnico di Torino, 1998-1999, Cap 4.

Frequenza	Definizione	Utilizzo tipico
3 – 30 kHz	Very Low Frequency (VLF)	Navigazione, sonar
30 – 300 kHz	Low Frequency (LF)	Segnali radio, soccorso navale
300 – 3000 kHz	Medium Frequency (MF)	Trasmissioni radio AM, comunicazioni navali, comunicazioni della Guardia costiera, orientamento
3 – 30 MHz	High Frequency (HF)	Comunicazioni internazionali ad onde corte; radio amatori; comunicazioni nave-costa, nave-velivoli
30 – 300 MHz	Very High Frequency (VHF)	Televisione, trasmissioni radio FM, controllo del traffico aereo, polizia, soccorso navale
300 – 3000 MHz	Ultrahigh Frequency (UHF)	Televisione, comunicazioni satellitari, radiosonde, radar di sorveglianza, soccorso navale; comunicazioni mobili (GSM, etc.)
3 – 30 GHz	Superhigh Frequency (SHF)	Radar per aviotrasporti, collegamenti a microonde, comunicazioni satellitari
30 – 300 GHz	Extremely High Frequency (EHF)	Radar, esperimenti

Tabella 1.1. Nomi convenzionali delle bande di frequenza

Frequenza	Vecchia designazione	Nuova designazione
500 – 1000 MHz	VHF	C
1 – 2 GHz	L	D
2 – 3 GHz	S	E
3 – 4 GHz	S	F
4 – 6 GHz	C	G
6 – 8 GHz	C	H
8 – 10 GHz	X	I
10 – 12.4 GHz	X	J
12.4 – 18 GHz	Ku	J
18 – 20 GHz	K	J
20 – 26.5 GHz	K	K
26.5 – 40 GHz	Ka	K

Tabella 1.2. Classificazione delle bande di frequenza

2

Irradiazione nello spazio libero

2.1 Problema-guida: equazioni di una linea indefinita con sorgenti

Prima di affrontare il problema della risoluzione delle equazioni di Maxwell ci proponiamo, al fine di avere un'idea della strategia che adopereremo, di risolvere un problema-guida analogo, ma con la semplificazione della scalarità ed unidimensionalità. Il problema è quello del calcolo di tensioni e correnti prodotte da sorgenti impresse su una linea di trasmissione infinitamente estesa, chiaramente analogo a quello del calcolo del campo elettromagnetico prodotto da sorgenti impresse nello spazio libero.

Scriviamo dunque le equazioni di una linea con sorgenti

$$\begin{cases} -\frac{d}{dz}V(z) = jkZ_\infty I(z) + v_s(z) \\ -\frac{d}{dz}I(z) = jkY_\infty V(z) + i_s(z) \end{cases} \quad (2.1)$$

avendo rappresentato le sorgenti con dei generatori distribuiti di tensione e corrente. Supponiamo anche che la linea abbia perdite, e quindi scriviamo $k = \beta_0 - j\alpha$. Dato che il supporto in z è infinito, possiamo considerare le trasformate di Fourier che legano il dominio spaziale z al dominio spettrale β

$$\tilde{V}(\beta) = \text{FT}\{V(z)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz V(z) e^{j\beta z} \quad (2.2)$$

$$V(z) = \text{FT}^{-1}\{\tilde{V}(\beta)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \tilde{V}(\beta) e^{-j\beta z} \quad (2.3)$$

$$\tilde{I}(\beta) = \text{FT}\{I(z)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz I(z) e^{j\beta z} \quad (2.4)$$

$$I(z) = \text{FT}^{-1}\{\tilde{I}(\beta)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \tilde{I}(\beta) e^{-j\beta z} \quad (2.5)$$

Siccome si ha

$$\frac{d}{dz} \xrightarrow{\text{FT}} -j\beta \quad (2.6)$$

le equazioni di partenza possono essere scritte nel dominio spettrale come segue:

$$\begin{cases} j\beta \tilde{V}(\beta) = jkZ_\infty \tilde{I}(\beta) + \tilde{v}_s(\beta) \\ j\beta \tilde{I}(\beta) = jkY_\infty \tilde{V}(\beta) + \tilde{i}_s(\beta) \end{cases} \quad (2.7)$$

avendo posto $\tilde{v}_s(\beta) = \text{FT}\{v_s(z)\}$ e $\tilde{i}_s(\beta) = \text{FT}\{i_s(z)\}$. Utilizzando una notazione matriciale abbiamo

$$\begin{bmatrix} j\beta & -jkZ_\infty \\ -jkY_\infty & j\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}(\beta) \\ \tilde{I}(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_s(\beta) \\ \tilde{i}_s(\beta) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Per ottenere $\tilde{V}(\beta)$ e $\tilde{I}(\beta)$ dobbiamo invertire la matrice dei coefficienti, ricordando che

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Si ottiene

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}(\beta) \\ \tilde{I}(\beta) \end{bmatrix} = [\tilde{G}(\beta)] \begin{bmatrix} \tilde{v}_s(\beta) \\ \tilde{i}_s(\beta) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

dove si è introdotta la matrice $[\tilde{G}(\beta)]$

$$[\tilde{G}(\beta)] = -\frac{1}{\beta^2 - k^2} \begin{bmatrix} j\beta & jkZ_\infty \\ jkY_\infty & j\beta \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Esprimendo separatamente tensione e corrente possiamo scrivere

$$\begin{cases} \tilde{V}(\beta) = \tilde{G}_{11}(\beta) \tilde{v}_s(\beta) + \tilde{G}_{12}(\beta) \tilde{i}_s(\beta) \\ \tilde{I}(\beta) = \tilde{G}_{21}(\beta) \tilde{v}_s(\beta) + \tilde{G}_{22}(\beta) \tilde{i}_s(\beta) \end{cases} \quad (2.12)$$

e quindi otteniamo, antitrasformando

$$\begin{cases} V(z) = G_{11}(z) * v_s(z) + G_{12}(z) * i_s(z) \\ I(z) = G_{21}(z) * v_s(z) + G_{22}(z) * i_s(z) \end{cases} \quad (2.13)$$

dove

$$G_{ij}(z) = \text{FT}^{-1}\{\tilde{G}_{ij}(\beta)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_{ij}(\beta) e^{-j\beta z} d\beta \quad (2.14)$$

e il simbolo “*” indica il prodotto di convoluzione. Osserviamo che i termini $\tilde{G}_{ij}(\beta)$ hanno il significato di funzioni di trasferimento e quindi i termini $G_{ij}(z)$ di risposte all’impulso nello spazio. A questo punto $V(z)$ e $I(z)$ possono essere espresse in forma compatta

$$\begin{bmatrix} V(z) \\ I(z) \end{bmatrix} = [G(z)] * \begin{bmatrix} v_s(z) \\ i_s(z) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

dove la matrice $[G(z)]$, che chiamiamo *funzione di Green*, generalizza il concetto di risposta all’impulso nello spazio. Per quanto riguarda la forma esplicita della funzione di Green, notiamo che la sua trasformata dipende dal termine

$$\tilde{g}_0(\beta) = \frac{1}{\beta^2 - k^2} \quad (2.16)$$

È utile allora introdurre anche la sua antitrasformata

$$g_0(z) = \text{FT}^{-1}\{\tilde{g}_0(\beta)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \frac{1}{\beta^2 - k^2} e^{-j\beta z} \quad (2.17)$$

La funzione $\tilde{g}_0(\beta)$ presenta due poli, in $\beta = -k$ e $\beta = +k$, con $k = \beta_0 - j\alpha$. Si tratta dei due valori della variabile spettrale per cui l’uscita ha un valore finito se la sorgente tende a zero, cioè si autosostiene: essi corrispondono dunque alle *soluzioni libere* dell’equazione. Calcolando l’integrale (2.17) otteniamo (vedi App. C)

$$g_0(z) = \frac{e^{-jk|z|}}{2jk} \quad (2.18)$$

Inoltre

$$\tilde{G}_{11}(\beta) = \tilde{G}_{22}(\beta) = -j\beta \frac{1}{\beta^2 - k^2} \Rightarrow G_{11}(z) = G_{22}(z) = \frac{d}{dz} g_0(z) \quad (2.19)$$

e dunque, in forma matriciale

$$[G(z)] = -\frac{1}{2} e^{-jk|z|} \begin{bmatrix} \text{sgn}(z) & Z_\infty \\ Y_\infty & \text{sgn}(z) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Osserviamo che la (2.18) rappresenta un’onda che si allontana dalla sorgente in entrambe le direzioni $z > 0$ e $z < 0$; dunque la sorgente è il centro della perturbazione ondosa, e le caratteristiche propagative sono legate ai poli della funzione di Green spettrale, ovvero ai poli della funzione $g_0(z)$. Tenendo conto delle perdite, $k = \beta - j\alpha$, la (2.18) rappresenta correttamente un’onda che si attenua allontanandosi dalla sorgente ($z = 0$). Notiamo che il caso senza perdite ($\alpha = 0$) va ottenuto come limite ($\alpha \rightarrow 0$) della soluzione generale; la presenza di perdite è essenziale, dal punto di vista matematico, in quanto per $\alpha = 0$ i poli, nell’integrale che definisce g_0 , sono sull’asse immaginario e la deformazione del cammino di integrazione (vedi App. C) non è definita. Notiamo che non abbiamo imposto esplicitamente condizioni al contorno (che sarebbero condizioni al contorno all’infinito); queste risultano “intrinseche” alla forma di soluzione cercata, purché si consideri un mezzo con perdite (sia pur piccole).

2.2 Il problema dell’irradiazione nello spazio libero

Affrontiamo ora il problema dell’irradiazione nello spazio libero (mezzo omogeneo e isotropo), cioè della soluzione delle equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti+

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{H} = j\omega\epsilon \underline{E} + \underline{J}_e \\ -\nabla \times \underline{E} = j\omega\mu \underline{H} + \underline{J}_m \end{cases} \quad (2.21)$$

Anche qui non imporremo esplicitamente le condizioni al contorno all'infinito, considerando poi che la soluzione ottenuta sia fisica. Come nel problema guida, adotteremo una tecnica spettrale, cioè basata sulla funzione di trasferimento. Il punto di forza della trasformata di Fourier sta nel rendere algebrico l'operatore di derivata (esempio $\frac{d}{dz} \rightarrow -j\beta$); avendo qui a che fare con 3 derivate spaziali (∇ , ad esempio $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$) dovremo considerare una tripla trasformata di Fourier. Per definire tale trasformata dei campi vettoriali, cominciamo a notare che un generico campo $\underline{A}(\underline{r})$ viene univocamente determinato dai versori coordinati $\hat{u}_i$ e dalle componenti del campo A_i rispetto al particolare sistema di riferimento, cioè

$$\underline{A}(\underline{r}) \equiv \sum_{i=1}^3 A_i(\underline{r}) \hat{u}_i \quad (2.22)$$

(cambiando il sistema di riferimento cambiano le componenti A_i). Per semplicità consideriamo un sistema cartesiano (x_1, x_2, x_3) , che ha il vantaggio di avere dei versori coordinati $\hat{u}_i = \hat{x}_i$ che non dipendono dalla posizione nello spazio. Definiamo la trasformata tripla scalare della generica componente $A_i(\underline{r})$ come

$$\tilde{A}_i = \text{FT}^3 \{A_i(\underline{r})\} = \tilde{A}_i(\underline{k}) = \int_{\mathbf{R}} dx_1 e^{jk_1 x_1} \int_{\mathbf{R}} dx_2 e^{jk_2 x_2} \int_{\mathbf{R}} dx_3 e^{jk_3 x_3} A_i(x_1, x_2, x_3) \quad (2.23)$$

Indichiamo con $d^3 \underline{r}$ l'elemento di volume $dx_1 dx_2 dx_3$ nello spazio $\underline{r}$ e riscriviamo la (2.23) in forma più compatta insieme alla trasformata inversa, introducendo un vettore $\underline{k} = k_1 \hat{x}_1 + k_2 \hat{x}_2 + k_3 \hat{x}_3$ che chiamiamo *variabile spettrale*.

$$\tilde{A}_i(\underline{k}) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r} A_i(\underline{r}) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}; \quad A_i(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{k} \tilde{A}_i(\underline{k}) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.24)$$

Avendo trasformato le singole componenti scriviamo quindi

$$\underline{\tilde{A}}(\underline{k}) \equiv \sum_{i=1}^3 \tilde{A}_i(\underline{k}) \hat{x}_i \quad (2.25)$$

e dunque, compattamente

$$\underline{\tilde{A}}(\underline{k}) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r} \underline{A}(\underline{r}) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}; \quad \underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{k} \underline{\tilde{A}}(\underline{k}) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.26)$$

sottintendendo il passaggio nella base cartesiana per il calcolo esplicito della trasformata di Fourier. Un campo viene in questo modo espresso come *espansione in onde piane*. Ad una singola onda piana è associata una densità di potenza costante, e dunque un'energia infinita; quindi le onde piane non possono sussistere singolarmente ma, come abbiamo visto, riescono a descrivere l'andamento di un campo se sovrapposte opportunamente in forma integrale. Il discorso è analogo a quello dei segnali nel tempo, che possono essere espressi come somma (integrale) di segnali armonici, i quali tuttavia non possono esistere da soli perché non sono segnali ad energia finita. Dato che

$$\nabla e^{\pm j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \mp j\mathbf{k} e^{\pm j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.27)$$

le equazioni di Maxwell nel dominio spettrale $\underline{k}$ diventano

$$\begin{cases} -j\underline{k} \times \underline{\tilde{H}} = j\omega\epsilon\underline{\tilde{E}} + \underline{\tilde{J}}_e \\ j\underline{k} \times \underline{\tilde{E}} = j\omega\mu\underline{\tilde{H}} + \underline{\tilde{J}}_m \end{cases} \quad (2.28)$$

Il sistema (2.28) può essere scritto compattamente in forma matriciale se introduciamo degli “oggetti” che rappresentino, in forma indipendente dalle coordinate, le trasformazioni lineari (omogenee) tra vettori. Tali “oggetti” sono le diadi (diadiche), descritte nell'App. B. Per esempio possiamo scrivere

$$\underline{k} \times \underline{\tilde{H}} = \underline{k} \times (\underline{I} \cdot \underline{\tilde{H}}) = (\underline{k} \times \underline{I}) \cdot \underline{\tilde{H}} \quad (2.29)$$

dove $\underline{D} \equiv \underline{k} \times \underline{I}$ è una diade che esprime la trasformazione lineare $\underline{\tilde{H}} \rightarrow \underline{k} \times \underline{\tilde{H}}$. Possiamo allora riscrivere la (2.28) come

$$\begin{bmatrix} -j\omega\epsilon\underline{I} & -j\underline{k} \times \underline{I} \\ j\underline{k} \times \underline{I} & -j\omega\mu\underline{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\tilde{E}} \\ \underline{\tilde{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{J}}_e \\ \underline{\tilde{J}}_m \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

ovvero anche

$$[\underline{\mathcal{L}}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{\tilde{E}} \\ \underline{\tilde{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{J}}_e \\ \underline{\tilde{J}}_m \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

dove

$$[\underline{\mathcal{L}}] \equiv \begin{bmatrix} -j\omega\epsilon\underline{I} & -j\underline{k} \times \underline{I} \\ j\underline{k} \times \underline{I} & -j\omega\mu\underline{I} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Formalmente allora, il problema è risolto nel dominio spettrale dalla *funzione di Green spettrale*

$$[\underline{\tilde{\mathcal{G}}}(k)] = [\underline{\mathcal{L}}]^{-1} \quad (2.33)$$

ed campi nello spazio saranno ricavati a partire dalle antitrasformate della soluzione spettrale.

2.2.1 Calcolo della funzione di Green spettrale

Per rendere esplicita l'operazione formale di inversione $[\underline{\tilde{\mathcal{G}}}(k)] = [\underline{\mathcal{L}}]^{-1}$ definiamo tale operazione:

$$[\underline{\mathcal{L}}] \cdot [\underline{\tilde{\mathcal{G}}}(k)] = [\underline{\mathcal{I}}] \quad (2.34)$$

dove $[\underline{\mathcal{I}}]$ è l'elemento identico definito da

$$[\underline{\mathcal{I}}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{\tilde{E}} \\ \underline{\tilde{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{E}} \\ \underline{\tilde{H}} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

e quindi

$$[\underline{\mathcal{I}}] = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Se poniamo dunque

$$[\underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}] = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{11} & \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{12} \\ \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{21} & \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

la relazione formale (2.34) diventa un sistema esplicito

$$\begin{bmatrix} -j\omega\epsilon \underline{\underline{I}} & -j\underline{k} \times \underline{\underline{I}} \\ j\underline{k} \times \underline{\underline{I}} & -j\omega\mu \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{11} & \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{12} \\ \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{21} & \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

cioè

$$\begin{cases} -j\omega\epsilon \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{11} - j\underline{k} \times \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{21} = \underline{\underline{I}} \\ j\underline{k} \times \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{11} - j\omega\mu \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{21} = \underline{\underline{0}} \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\begin{cases} -j\omega\epsilon \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{12} - j\underline{k} \times \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{22} = \underline{\underline{0}} \\ j\underline{k} \times \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{12} - j\omega\mu \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{22} = \underline{\underline{I}} \end{cases} \quad (2.40)$$

che possiamo risolvere procedendo nel modo solito, ma tenendo conto del calcolo diadico. Data la dualità delle equazioni (derivante dalla dualità delle equazioni di Maxwell), consideriamo solo la prima coppia di equazioni, esplicitando $\underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{21}$ dalla seconda e sostituendolo nella prima

$$\underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{21} = \frac{1}{j\omega\mu} (j\underline{k} \times \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{11}) \quad (2.41)$$

$$-j\omega\epsilon \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{11} - j\underline{k} \times \left(\frac{1}{j\omega\mu} j\underline{k} \times \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{11} \right) = \underline{\underline{I}} \quad (2.42)$$

$$(-j\omega\epsilon)(j\omega\mu) \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{11} - j\underline{k} \times (j\underline{k} \times \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{11}) = j\omega\mu \underline{\underline{I}} \quad (2.43)$$

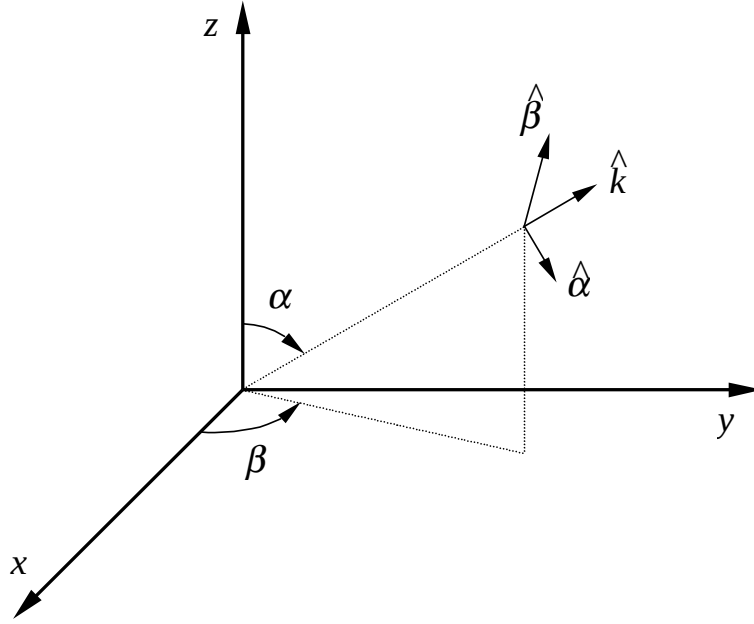
$$\left[\omega^2\epsilon\mu \underline{\underline{I}} + \underline{k} \times (\underline{k} \times \underline{\underline{I}}) \right] \cdot \underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{11} = j\omega\mu \underline{\underline{I}} \quad (2.44)$$

Dunque, posto uguale a $\underline{\underline{Q}}$ il termine in parentesi quadre, possiamo svolgere il doppio prodotto esterno e quindi scrivere

$$\underline{\underline{Q}} = \omega^2\epsilon\mu \underline{\underline{I}} + \left[(\underline{k} \cdot \underline{\underline{I}}) \underline{k} - (\underline{k} \cdot \underline{k}) \underline{\underline{I}} \right] = (\omega^2\epsilon\mu - k^2) \underline{\underline{I}} + \underline{k} \underline{k} \quad (2.45)$$

avendo posto $k^2 = \underline{k} \cdot \underline{k}$ ed essendo $\underline{k} \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{k}$. A questo punto il problema si è ridotto al calcolo della diade inversa $\underline{\underline{Q}}^{-1}$, nota la quale possiamo determinare $\underline{\underline{\tilde{\mathcal{G}}}}_{11}$. Dobbiamo dunque fissare due sistemi di riferimento opportuni per passare alla rappresentazione matriciale $[Q]$ della diade $\underline{\underline{Q}}$, determinare $[Q]^{-1}$ e così ottenere la diade $\underline{\underline{Q}}^{-1}$. In un mezzo omogeneo il sistema di riferimento sferico offre notevoli vantaggi. Introducendo il sistema sferico $\underline{k} \rightarrow (k, \alpha, \beta)$ (vedi Fig. 2.1), i cui tre versori sono $\hat{k}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ (corrispondenti a $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ spaziali), il termine $\underline{k} \underline{k}$, può anche essere scritto come $k^2 \hat{k} \hat{k}$, visto che $\underline{k} = k \hat{k}$. La diade identità è data da

$$\underline{\underline{I}} = \hat{k} \hat{k} + \hat{\alpha} \hat{\alpha} + \hat{\beta} \hat{\beta} \quad (2.46)$$

Figura 2.1. Sistema di riferimento sferico ($\hat{k}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$)

e dunque la diade $\underline{\underline{Q}}$ può essere scritta come

$$\begin{aligned}\underline{\underline{Q}} &= (\omega^2 \epsilon \mu - k^2)(\hat{k}\hat{k} + \hat{\alpha}\hat{\alpha} + \hat{\beta}\hat{\beta}) + k^2 \hat{k}\hat{k} = \\ &= \omega^2 \epsilon \mu \hat{k}\hat{k} + (\omega^2 \epsilon \mu - k^2)(\hat{\alpha}\hat{\alpha} + \hat{\beta}\hat{\beta})\end{aligned}\quad (2.47)$$

Notiamo che con la scelta del sistema di riferimento sferico otteniamo una matrice $[Q]$ diagonale, come si vede dall'assenza di accostamenti tra versori coordinati di tipo misto. Vale a dire che

$$Q_{ij} = \hat{u}_i \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \hat{u}_j = 0 \quad \text{se } i \neq j \quad (2.48)$$

(per esempio $Q_{12} = \hat{k} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \hat{\alpha} = \hat{k} \cdot (\omega^2 \epsilon \mu - k^2) \cdot \hat{\alpha} = 0$ perché $(\hat{k}\hat{k}) \cdot \hat{\alpha} = \hat{k}(\hat{k} \cdot \hat{\alpha}) = 0$, $(\hat{\alpha}\hat{\alpha}) \cdot \hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\hat{\alpha} \cdot \hat{\alpha}) = \hat{\alpha}$ e $(\hat{\beta}\hat{\beta}) \cdot \hat{\alpha} = \hat{\beta}(\hat{\beta} \cdot \hat{\alpha}) = 0$). Di conseguenza

$$[Q] = \begin{bmatrix} \omega^2 \epsilon \mu & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 \epsilon \mu - k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \epsilon \mu - k^2 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

e ovviamente

$$[Q]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega^2 \epsilon \mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega^2 \epsilon \mu - k^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega^2 \epsilon \mu - k^2} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

È altrettanto immediato scrivere la diade $\underline{\underline{Q}}^{-1}$:

$$\underline{\underline{Q}}^{-1} = \frac{1}{\omega^2 \epsilon \mu} \hat{k}\hat{k} + \frac{1}{\omega^2 \epsilon \mu - k^2} (\hat{\alpha}\hat{\alpha} + \hat{\beta}\hat{\beta}) \quad (2.51)$$

Dato che

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\tilde{G}}}_{11} = j\omega\mu \underline{\underline{I}} \quad (2.52)$$

si ha

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tilde{G}}}_{11} &= \underline{\underline{Q}}^{-1} \cdot j\omega\mu \underline{\underline{I}} = j\omega\mu \underline{\underline{Q}}^{-1} \cdot \underline{\underline{I}} = \\ &= j\omega\mu \left[\frac{1}{\omega^2\epsilon\mu} \hat{k}\hat{k} + \frac{1}{\omega^2\epsilon\mu - k^2} (\hat{\alpha}\hat{\alpha} + \hat{\beta}\hat{\beta}) \right] = \\ &= j \left[\frac{1}{\omega\epsilon} \hat{k}\hat{k} + \frac{\omega\mu}{\omega^2\epsilon\mu - k^2} (\hat{\alpha}\hat{\alpha} + \hat{\beta}\hat{\beta}) \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

Dalla coppia di sistemi (2.39) e (2.40) si ricavano $\underline{\underline{\tilde{G}}}_{12}$, $\underline{\underline{\tilde{G}}}_{21}$, $\underline{\underline{\tilde{G}}}_{22}$, e dunque abbiamo completamente determinato la matrice di diadi $[\underline{\underline{\tilde{G}}}]$.

2.2.2 Calcolo della funzione di Green spaziale

Il problema successivo è il ritorno al dominio spaziale dal dominio spettrale. Iniziamo con il definire due grandezze nel dominio spettrale

$$\underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k}) = -\underline{\underline{Q}}^{-1}; \quad \tilde{\Psi}(\underline{k}) = \frac{1}{k^2 - \omega^2\epsilon\mu} = \tilde{\Psi}(k) \quad (2.54)$$

Riscriviamo allora l'espressione di $\underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k})$ tenendo conto che

$$\hat{k}\hat{k} = \frac{\underline{k}\underline{k}}{k^2} = (-j\underline{k})(-j\underline{k}) \left(-\frac{1}{k^2} \right) \quad (2.55)$$

Otteniamo la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k}) &= \frac{1}{k^2 - \omega^2\epsilon\mu} \underline{\underline{I}} + \left(\frac{1}{\omega^2\epsilon\mu - k^2} - \frac{1}{\omega^2\epsilon\mu} \right) \hat{k}\hat{k} = \\ &= \tilde{\Psi}(k) \left(\underline{\underline{I}} - \frac{k^2}{\omega^2\epsilon\mu} \hat{k}\hat{k} \right) = \left[\underline{\underline{I}} + \frac{1}{\omega^2\epsilon\mu} (-j\underline{k})(-j\underline{k}) \right] \tilde{\Psi}(k) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Questa manipolazione ci consente di calcolare l'antitrasformata $\underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k})$ in forma chiusa. Dato che

$$\text{FT}^{-3} \{ \underline{\underline{I}} \} = \underline{\underline{I}}; \quad -j\underline{k} \xleftrightarrow{\text{FT}^3} \nabla \quad (2.57)$$

si ottiene infatti la seguente espressione formale

$$\underline{\underline{G}}(\underline{r}) = \text{FT}^{-3} \{ \underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k}) \} = \left(\underline{\underline{I}} + \frac{\nabla\nabla}{\omega^2\epsilon\mu} \right) \Psi(\underline{r}) \quad (2.58)$$

essendo

$$\Psi(\underline{r}) = \text{FT}^{-3} \{ \tilde{\Psi}(k) \} \quad (2.59)$$

Alla diade $\underline{\underline{G}}(\underline{r})$ diamo il nome di *funzione diadica di Green*. Si ottiene allora, partendo dalla forma spettrale

$$[\underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k})] = \begin{bmatrix} -j\omega\mu \underline{\underline{\tilde{G}}} & j\underline{k} \times \underline{\underline{\tilde{G}}} \\ -j\underline{k} \times \underline{\underline{\tilde{G}}} & -j\omega\epsilon \underline{\underline{\tilde{G}}} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

il seguente risultato nel dominio spaziale:

$$[\underline{\underline{G}}(\underline{r})] = \begin{bmatrix} -j\omega\mu \underline{\underline{G}} & -\nabla \times \underline{\underline{G}} \\ \nabla \times \underline{\underline{G}} & -j\omega\epsilon \underline{\underline{G}} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

La soluzione è dunque formalmente ricavata, ma è possibile semplificarla eliminando il rotore di $\underline{\underline{G}}$. Infatti se poniamo

$$\underline{\underline{\tilde{G}}} = -j\underline{k} \times \underline{\underline{\tilde{G}}} \quad (2.62)$$

notiamo che è possibile scrivere

$$\underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k}) = -j\underline{k} \times \left[\underline{\underline{I}} + \frac{1}{\omega^2\epsilon\mu}(-j\underline{k})(-j\underline{k}) \right] \tilde{\Psi}(\underline{k}) \quad (2.63)$$

Si può ora notare che

$$(-j\underline{k}) \times (-j\underline{k})(-j\underline{k}) = [(-j\underline{k}) \times (-j\underline{k})](-j\underline{k}) = 0 \quad (2.64)$$

e quindi si semplifica l'espressione di $\underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k})$ nel modo seguente:

$$\underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k}) = -j\underline{k} \times \underline{\underline{I}} \tilde{\Psi}(\underline{k}) = -j\underline{k} \tilde{\Psi}(\underline{k}) \times \underline{\underline{I}} \quad (2.65)$$

cioè, antitrasformando

$$\underline{\underline{G}}'(\underline{r}) = \nabla \Psi(\underline{r}) \times \underline{\underline{I}} \quad (2.66)$$

2.2.3 Funzione di Helmholtz e onde sferiche

La funzione $\Psi(\underline{r})$, nota come *funzione di Green scalare* o *funzione di Helmholtz*, è l'antitrasformata di Fourier di $\tilde{\Psi}(\underline{k})$, cioè

$$\Psi(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{k} \tilde{\Psi}(\underline{k}) e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} \quad (2.67)$$

Come riportato in App. D si ottiene

$$\Psi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-jk_0 r} = \Psi(r) \quad (2.68)$$

con $k_0^2 \equiv \omega^2\epsilon\mu$. Osserviamo che la funzione di Helmholtz risulta funzione non del vettore di osservazione, bensì solo del suo modulo, cioè della distanza di osservazione. La funzione di trasferimento spettrale $\tilde{\Psi}(\underline{k})$ ha un polo per $\underline{k} \cdot \underline{k} = k_0^2$: questa relazione è già nota, trattandosi della relazione di dispersione di un'onda piana. Questo ci consente di dire che le onde piane sono possibili modi del nostro sistema, cioè sono soluzioni libere, che si autosostengono a sorgenti

nulle, come già visto altrimenti. Possiamo aggiungere che i poli si trovano su una superficie sferica di raggio k_0 nello spazio $\underline{k}$, e che il vettore $\underline{k}$ ha solo il modulo fissato dalla relazione di dispersione, non la direzione; quindi sono possibili onde piane in qualunque direzione, anche se in realtà le onde piane non sono oggetti fisici, come abbiamo già discusso in precedenza. In presenza di perdite, le quali garantiscono l'univocità del risultato, si ha $k_0^2 \in C$, quindi i poli non sono sull'asse reale e non ci sono ambiguità nel calcolo della funzione di Helmholtz con il lemma di Jordan. Il caso senza perdite, per cui $k_0^2 \in \mathbf{R}$, va invece trattato come caso limite del caso con perdite, quando la parte immaginaria di k_0^2 è molto piccola: in tal caso l'esponenziale della funzione di Helmholtz tende ad essere un esponenziale puramente di fase.

La presenza di tale esponenziale dice che la funzione di Helmholtz $\Psi(r)$ rappresenta un'onda; le superfici a fase costante e ad ampiezza costante sono date rispettivamente da

$$k_0 r = \text{cost} \Rightarrow r = \text{cost} \quad (2.69)$$

$$|\Psi| = \text{cost} \Rightarrow \frac{1}{4\pi r} = \text{cost} \Rightarrow r = \text{cost} \quad (2.70)$$

Trattandosi di superfici sferiche possiamo concludere che $\Psi(r)$ è un'onda sferica. In effetti intuitivamente se pensiamo al campo generato da una sorgente concentrata in un punto possiamo immaginare che la perturbazione abbia un andamento di tipo sferico (si pensi ad un sasso che cade in acqua: la perturbazione è circolare perché in due dimensioni).

Per convincerci che $\Psi(r)$ si espande nel tempo sfericamente possiamo esaminarla nel dominio del tempo. Consideriamo un segnale del tipo

$$X(r, \omega) = A(\omega) \frac{1}{4\pi r} e^{-j\frac{\omega}{c}r} \quad (2.71)$$

($k_0 = \frac{\omega}{c}$, essendo c la velocità della luce nel vuoto) dove $A(\omega)$ indica l'ampiezza della trasformata del nostro segnale. Chiamando $a(t)$ l'antitrasformata di $A(\omega)$, si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{A(\omega)}{4\pi r} e^{-j\frac{\omega}{c}r} e^{j\omega t} = \\ &= \frac{1}{4\pi r} a\left(t - \frac{r}{c}\right) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Fissando un istante di tempo è evidente che i punti spaziali alla stessa ampiezza sono sulla sfera descritta da $r = ct$, con l'altrettanto evidente espansione del raggio di tale sfera al trascorrere del tempo. Anche in assenza di perdite si ha comunque una diminuzione della densità di potenza come $\frac{1}{r^2}$ all'aumentare della distanza r dalla sorgente in ogni punto: ciò è semplicemente dovuto al fatto che l'onda si allarga e quindi la potenza totale irradiata deve rimanere costante, ma su uno spazio sempre maggiore, cioè l'energia si ridistribuisce su una superficie sempre più grande (torneremo su questo aspetto parlando dell'irradiazione di un dipolo elementare in campo lontano).

Per dimostrare che effettivamente la funzione di Helmholtz rappresenta un'onda dobbiamo comunque provare che essa soddisfa ad una equazione d'onda. Partendo dalla definizione

$$\tilde{\Psi}(k) = \frac{1}{\underline{k} \cdot \underline{k} - \omega^2 \epsilon \mu} \quad (2.73)$$

scriviamo

$$\underline{k} \cdot \underline{k} \tilde{\Psi}(k) - \omega^2 \epsilon \mu \tilde{\Psi}(k) = 1 \quad (2.74)$$

$$- \left[(-j\underline{k}) \cdot (-j\underline{k}) + \omega^2 \epsilon \mu \right] \tilde{\Psi}(k) = 1 \quad (2.75)$$

che nel dominio spaziale corrisponde a

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \epsilon \mu \right) \Psi(r, \omega) = \delta(\underline{r}) \quad (2.76)$$

che è appunto l'*equazione scalare di Helmholtz*, cioè l'equazione d'onda nel dominio della frequenza, cui corrisponde nel dominio del tempo l'*equazione di D'Alembert*

$$\left(\nabla^2 - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(r, t) = \delta(\underline{r}) \delta(t) \quad (2.77)$$

essa rappresenta l'equazione delle onde, ma con un termine esplicito δ di sorgente. Possiamo anche cercare l'equazione cui deve soddisfare $\underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k})$. Ricordando che

$$\underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k}) = -\underline{\underline{Q}}^{-1} \quad (2.78)$$

otteniamo

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k}) = -\underline{\underline{I}} \quad (2.79)$$

possiamo dunque scrivere

$$\left[(k^2 - \omega^2 \epsilon \mu) \underline{\underline{I}} - \underline{k} \underline{k} \right] \cdot \underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k}) = \underline{\underline{I}} \quad (2.80)$$

Questa espressione era stata ricavata manipolando l'espressione seguente:

$$- \left[\underline{k} \times (\underline{k} \times \underline{\underline{I}}) + \omega^2 \epsilon \mu \underline{\underline{I}} \right] \cdot \underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k}) = \underline{\underline{I}} \quad (2.81)$$

$$\left\{ (-j\underline{k}) \times \left[(-j\underline{k}) \times \underline{\underline{I}} \right] - k_0^2 \underline{\underline{I}} \right\} \cdot \underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k}) = \underline{\underline{I}} \quad (2.82)$$

Otteniamo dunque nel dominio spaziale

$$\left[\nabla \times (\nabla \times \underline{\underline{I}}) - k_0^2 \underline{\underline{I}} \right] \cdot \underline{\underline{G}}(\underline{r}) = \delta(\underline{r}) \underline{\underline{I}} \quad (2.83)$$

cioè l'equazione d'onda vettoriale che si può ricavare partendo dalle equazioni di Maxwell.

2.2.4 Caratterizzazione dilontananza e vicinanza dalle sorgenti

L'espressione esplicita di $\underline{\underline{G}}$ e $\underline{\underline{G}}'$ si può infine ricavare mediante una valutazione integro-differenziale oppure mediante la valutazione dei termini $\nabla \Psi$ e $\nabla \nabla \Psi$, ambedue riportate in App. E. Si ottiene:

$$\underline{\underline{G}}(\underline{r}) = \left[A(k_0 r) \hat{r} \hat{r} + B(k_0 r) (\hat{\theta} \hat{\theta} + \hat{\phi} \hat{\phi}) \right] \Psi(r) \quad (2.84)$$

dove si è posto

$$A(k_0 r) = 2 \left(\frac{j}{k_0 r} + \frac{1}{(k_0 r)^2} \right) ; \quad B(k_0 r) = 1 - \frac{A(k_0 r)}{2} \quad (2.85)$$

e

$$\underline{\underline{G}}'(\underline{r}) = -j k_0 C(k_0 r) (\hat{\phi} \hat{\theta} - \hat{\theta} \hat{\phi}) \Psi(r) \quad (2.86)$$

dove il termine $(\hat{\phi}\hat{\theta} - \hat{\theta}\hat{\phi})$ deriva dal prodotto

$$\hat{r} \times \underline{\underline{I}} = \hat{r} \times (\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}) = \hat{\phi}\hat{\theta} - \hat{\theta}\hat{\phi} \quad (2.87)$$

e dove si è posto

$$C(k_0 r) = 1 - \frac{j}{k_0 r} \quad (2.88)$$

Da tali espressioni si può notare la presenza di un termine $\frac{1}{r}$ a fattore, mentre per il resto r non compare mai se non moltiplicato per k_0 . Questo significa che il termine $k_0 r$

$$k_0 r = 2\pi \frac{r}{\lambda_0} \quad (2.89)$$

è quello che esprime l'effetto della distanza della sorgente (in $\underline{r} = \underline{0}$) sui fenomeni elettromagnetici. Quindi il metro della valutazione della distanza da sorgenti elettromagnetiche è “tarato” in lunghezze d'onda (del mezzo in cui ci si trova). Distinguiamo allora fra *campo lontano*, osservato lontano dalla sorgente, per $r \gg \lambda_0$ e *campo vicino*, osservato nelle vicinanze della sorgente, per $r \ll \lambda_0$. Va notato che la vicinanza e la lontananza dalle sorgenti dipendono dalla frequenza che si considera e la condizione $\frac{r}{\lambda_0} = \frac{rf}{c} \ll 1$ significa vicinanza alla sorgente se si ragiona a f fissata, oppure bassa frequenza se si considera r fissato; alternativamente $\frac{r}{\lambda_0} \gg 1$ esprime la condizione di campo lontano o di alta frequenza. Questa dualità frequenza - distanza è una caratteristica importante delle equazioni di Maxwell ed esprime una proprietà generale di riscaldamento: per esempio la riflessione di onde elettromagnetiche da parte di un aereo è uguale a quella alla frequenza di 100 MHz di un modellino in scala 1:100 alla frequenza di 10 GHz.

La distinzione fra campo lontano e campo vicino è molto utile per semplificare, tramite delle approssimazioni, le conclusioni generali cui siamo pervenuti risolvendo le equazioni di Maxwell. Ovviamente il campo lontano è molto più importante ai fini delle Telecomunicazioni, tuttavia nella pratica il campo vicino è utile per la soluzione numerica di problemi di elettromagnetismo nonché per descrivere l'accoppiamento tra antenne affiancate.

2.2.5 Integrali di irradiazione

Abbiamo già determinato la funzione di Green e ci resta dunque da antitrasformare la relazione

$$\begin{bmatrix} \underline{\tilde{E}} \\ \underline{\tilde{H}} \end{bmatrix} = [\underline{\tilde{\mathcal{G}}}(\underline{k})] \cdot \begin{bmatrix} \underline{\tilde{J}}_e \\ \underline{\tilde{J}}_m \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Possiamo dunque scrivere

$$\begin{cases} \underline{\tilde{E}}(\underline{k}) = \underline{\tilde{\mathcal{G}}}_{11}(\underline{k}) \cdot \underline{\tilde{J}}_e(\underline{k}) + \underline{\tilde{\mathcal{G}}}_{12}(\underline{k}) \cdot \underline{\tilde{J}}_m(\underline{k}) \\ \underline{\tilde{H}}(\underline{k}) = \underline{\tilde{\mathcal{G}}}_{21}(\underline{k}) \cdot \underline{\tilde{J}}_e(\underline{k}) + \underline{\tilde{\mathcal{G}}}_{22}(\underline{k}) \cdot \underline{\tilde{J}}_m(\underline{k}) \end{cases} \quad (2.91)$$

Se consideriamo una sola componente delle relazioni vettoriali abbiamo, ad esempio

$$\tilde{E}_x = \left(\underline{\tilde{\mathcal{G}}}_{11}(\underline{k}) \right)_{xx} \tilde{J}_{ex}(\underline{k}) + \left(\underline{\tilde{\mathcal{G}}}_{12}(\underline{k}) \right)_{xx} \tilde{J}_{mx}(\underline{k}) \quad (2.92)$$

e quindi possiamo antitrasformare ottenendo l'usuale prodotto di convoluzione

$$E_x = \left(\underline{\underline{\mathcal{G}}}_{11}(\underline{r}) \right)_{xx} * J_{ex}(\underline{r}) + \left(\underline{\underline{\mathcal{G}}}_{12}(\underline{r}) \right)_{xx} * J_{mx}(\underline{r}) \quad (2.93)$$

È allora chiaro che raggruppando le componenti si ottiene

$$\underline{E}(\underline{r}) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \underline{\underline{\mathcal{G}}}_{11}(\underline{r} - \underline{r}') \cdot \underline{J}_e(\underline{r}') + \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \underline{\underline{\mathcal{G}}}_{12}(\underline{r} - \underline{r}') \cdot \underline{J}_m(\underline{r}') \quad (2.94)$$

$$\underline{H}(\underline{r}) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \underline{\underline{\mathcal{G}}}_{21}(\underline{r} - \underline{r}') \cdot \underline{J}_e(\underline{r}') + \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \underline{\underline{\mathcal{G}}}_{22}(\underline{r} - \underline{r}') \cdot \underline{J}_m(\underline{r}') \quad (2.95)$$

che si chiamano *integrali di irradiazione* e si possono compattare introducendo un prodotto di convoluzione rispetto al prodotto scalare, indicato con il simbolo “*” (siccome non useremo mai il prodotto di convoluzione per il prodotto esterno non c'è rischio di ambiguità), sicché

$$\begin{cases} \underline{E}(\underline{r}) = \underline{\underline{\mathcal{G}}}_{11}(\underline{r}) * \underline{J}_e(\underline{r}) + \underline{\underline{\mathcal{G}}}_{12}(\underline{r}) * \underline{J}_m(\underline{r}) \\ \underline{H}(\underline{r}) = \underline{\underline{\mathcal{G}}}_{21}(\underline{r}) * \underline{J}_e(\underline{r}) + \underline{\underline{\mathcal{G}}}_{22}(\underline{r}) * \underline{J}_m(\underline{r}) \end{cases} \quad (2.96)$$

ovvero, in una forma ancora più compatta:

$$\begin{bmatrix} \underline{E} \\ \underline{H} \end{bmatrix} = [\underline{\underline{\mathcal{G}}}(\underline{r})] * \begin{bmatrix} \underline{J}_e \\ \underline{J}_m \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

È evidente che gli integrali di irradiazione sono in generale complicati da risolvere, ma vedremo dei casi in cui si possono fare delle utili semplificazioni.

2.3 Dalle equazioni di campo vicino alle equazioni di campo quasi-statico

Supponiamo di essere nella condizione di campo vicino, cioè $k_0 r \ll 1$, e supponiamo anche di non avere sorgenti di tipo magnetico, cioè $\underline{J}_m = 0$. Come abbiamo appena visto il campo elettrico e il campo magnetico sono esprimibili in termini di integrali di irradiazione. Si può dunque scrivere:

$$\begin{cases} \underline{E}(\underline{r}) = -j\omega\mu \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \underline{\underline{\mathcal{G}}}(\underline{r} - \underline{r}') \underline{J}_e(\underline{r}') \\ \underline{H}(\underline{r}) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \underline{\underline{\mathcal{G}}}(\underline{r} - \underline{r}') \underline{J}_e(\underline{r}') \end{cases} \quad (2.98)$$

dove, essendo $k_0 r \ll 1$ e quindi $\frac{1}{k_0 r} \gg 1$, le espressioni $A(k_0 r)$, $B(k_0 r)$ e $C(k_0 r)$ assumono asintoticamente la seguente forma:

$$A(k_0 r) \simeq \frac{2}{(k_0 r)^2} ; B(k_0 r) \simeq -\frac{1}{(k_0 r)^2} ; C(k_0 r) \simeq -\frac{j}{k_0 r} \quad (2.99)$$

come si ottiene facilmente a partire dalle espressioni generali delle tre quantità. Vogliamo adesso vedere se e come le espressioni trovate si riducono a quelle statiche (o quasi-statiche)

note dal Corso di Fisica II. Analizzeremo quindi il caso $k_0 r \ll 1$ ed esamineremo anche il limite più propriamente statico, cioè $\omega \rightarrow 0$. Nel fare ciò assumeremo $\underline{J}_m = 0$, riconducendoci così al caso statico usuale.

Iniziamo con la determinazione del campo magnetico, la quale non dà grandi problemi; per semplicità consideriamo una corrente rettilinea con $\underline{J}_e \parallel \hat{z}$. Sotto questa ipotesi si ha

$$\begin{aligned} \underline{G}'(\underline{r}) \cdot \hat{z} &= -jk_0 C(k_0 r) \Psi(r) (\hat{\phi}\hat{\theta} - \hat{\theta}\hat{\phi}) \cdot \hat{z} = \\ &= -jk_0 C(k_0 r) \Psi(r) [\hat{\phi}(\hat{\theta} \cdot \hat{z}) - \hat{\theta}(\hat{\phi} \cdot \hat{z})] \end{aligned} \quad (2.100)$$

Siccome $\hat{\theta} \cdot \hat{z} = -\sin \theta$ e $\hat{\phi} \cdot \hat{z} = 0$ possiamo scrivere

$$\underline{G}'(\underline{r}) \cdot \hat{z} = jk_0 C(k_0 r) \Psi(r) \sin \theta \hat{\phi} \quad (2.101)$$

Si può notare che il campo magnetico è sempre diretto lungo $\hat{\phi}$, $\forall(k_0 r)$, come nel caso magnetostatico già noto.

Vogliamo adesso ottenere il risultato del campo magnetostatico per una geometria generale di filo percorso da corrente, a partire dalle relazioni che abbiamo sinora ottenuto tramite un processo al limite, cioè considerando la frequenza tendente a zero. Supponiamo quindi di avere un filo generico su cui sia impressa una corrente $\underline{J}_e$, caratterizzato dall'ascissa curvilinea s , dalla curva γ specificata da $\underline{r} = \underline{r}_\gamma(s)$ e dal versore tangente $\hat{s}$ in ogni punto, avente inoltre dimensione trasversale caratteristica a e lunghezza totale L (vedi Fig. 2.3), con $a \ll L$.

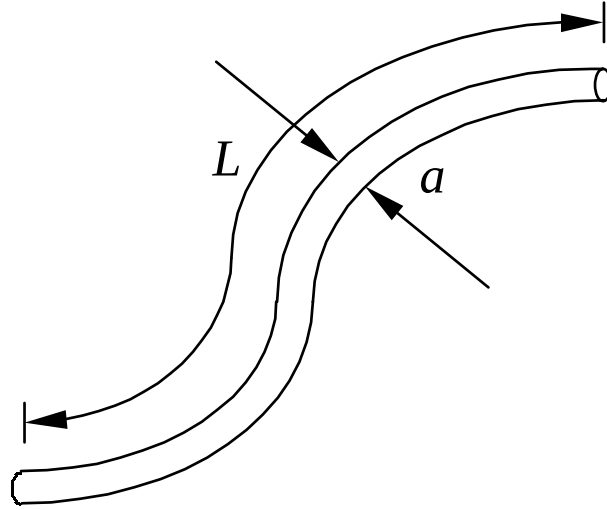


Figura 2.2. Filo generico ($a \ll L$).

Scriviamo la $\underline{J}_e$ per tale filo iniziando a considerare il caso più semplice, un filo rettilineo con $\underline{J}_e \parallel \hat{z}$, cioè $\underline{J}_e(x,y,z) = \delta(x)\delta(y)I(z)\hat{z}$, dove

$$I(z) = \int_{\Sigma_t} d\Sigma \hat{z} \cdot \underline{J}_e \quad (2.102)$$

essendo Σ_t la sezione trasversale del filo. Ciò si estende al caso generale scrivendo $\underline{J}_e(\underline{r}) = \delta(\underline{r} - \underline{r}_\gamma)I(s)\hat{s}$, dove

$$I(s) = \int_{\Sigma_t} d\Sigma \hat{s} \cdot \underline{J}_e \quad (2.103)$$

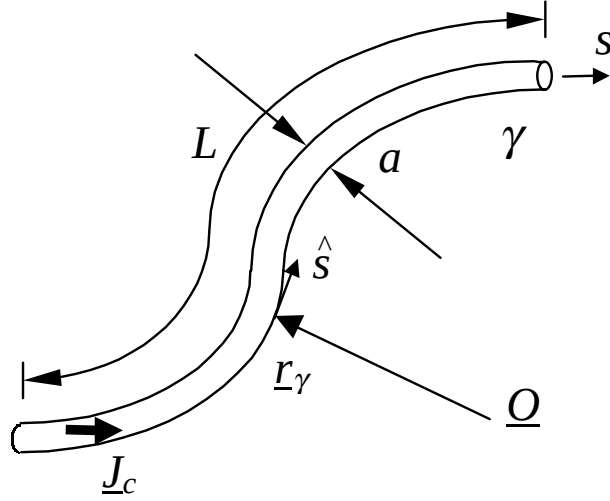


Figura 2.3. Calcolo del campo generato da una corrente che fluisce lungo un filo.

e dove la δ di linea $\delta(\underline{r} - \underline{r}_\gamma)$ è definita dal fatto di “campionare” solo lungo i punti della curva γ , trasformando un integrale di volume in uno di linea; matematicamente diremo che

$$\int d^3 \underline{r} f(\underline{r}) \delta(\underline{r} - \underline{r}_\gamma(s)) = \int ds f(\underline{r}_\gamma(s)) \quad (2.104)$$

da cui è chiaro che le dimensioni di $\delta(\underline{r} - \underline{r}_\gamma)$ sono $[\text{m}^{-2}]$.

Si noti che nel caso esattamente statico deve essere $I(s) = \text{cost.}$ Usando la seconda equazione delle (2.98) e l'espressione di $\underline{J}_c$ possiamo scrivere il campo magnetico come

$$\begin{aligned} \underline{H}(\underline{r}) &= \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \underline{G}'(\underline{r} - \underline{r}') \cdot \hat{s} \delta(\underline{r}' - \underline{r}_\gamma(s)) I(s) = \\ &= \int_0^L ds \underline{G}'(\underline{r} - \underline{r}_\gamma(s)) I(s) \hat{s} = \\ &= \int_0^L ds [\nabla \Psi(\underline{r}) \times \underline{I}] I(s) \hat{s} = \\ &= \int_0^L ds [\nabla \Psi(\underline{r}) \times \hat{s}] I(s) = \\ &= \int_0^L ds [\underline{g}(\underline{r} - \underline{r}_\gamma) \times \hat{s}] I(s) \end{aligned} \quad (2.105)$$

avendo posto $\nabla \Psi(\underline{r}) = \underline{g}(\underline{r})$. Passando al limite per $\omega \rightarrow 0$, cioè per $k_0 \rightarrow 0$ ($k_0 = \frac{\omega}{c}$) si ottiene

$$\underline{g}_0(\underline{r}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{g}(\underline{r}) = \lim_{k_0 \rightarrow 0} \hat{r} \frac{d\Psi}{dr} = -\frac{\hat{r}}{4\pi r^2} \quad (2.106)$$

Il campo magnetico quasi-statico è dato allora da

$$\underline{H}_0(\underline{r}) = \lim_{k_0 \rightarrow 0} \underline{H}(\underline{r}) = \int_0^L ds \underline{g}_0(\underline{r} - \underline{r}_\gamma) \times \hat{s} I(s) \quad (2.107)$$

Ponendo $\underline{d} = \underline{r} - \underline{r}_\gamma$ (vedi Fig. 2.4), si ottiene

$$\underline{g}_0(\underline{d}) = -\frac{\hat{d}}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}_\gamma|^2} \quad (2.108)$$

$$\underline{H}_0(\underline{r}) = -\int_0^L ds \frac{1}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}_\gamma|^2} [\hat{d} \times \hat{s}] I(s) \quad (2.109)$$

Questa relazione esprime un risultato ben noto nel caso magnetostatico: la *legge di Biot-Savart*.

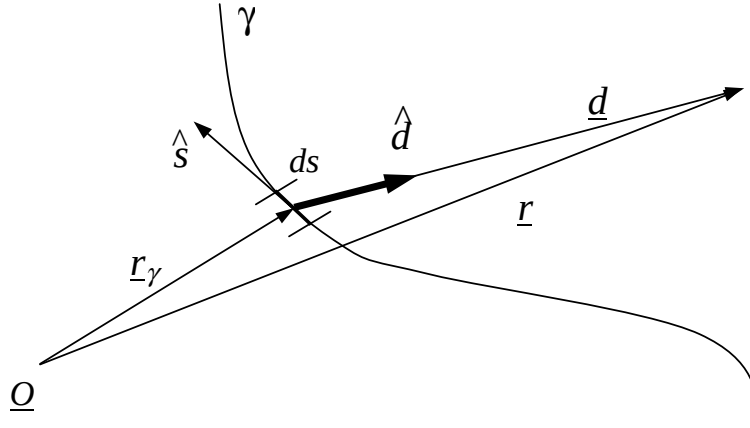


Figura 2.4. Legge di Biot-Savart.

Dunque la formula generale che esprime il campo magnetico è coerente con i risultati già noti dal campo statico.

È ragionevole pensare che ciò valga anche per il calcolo del campo elettrico, cioè che si possano ottenere le relazioni dell'elettrostatica a partire dall'espressione generale del campo elettrico in campo vicino. Per $k_0 \rightarrow 0$ abbiamo

$$\underline{\underline{G}} \simeq \frac{1}{(k_0 r)^2} \propto \frac{1}{\omega^2} \quad (2.110)$$

da cui, per la presenza del termine ω a fattore nell'espressione del campo elettrico

$$\underline{E} \propto \omega \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \left(\dots \frac{1}{\omega^2} \right) \Rightarrow \underline{E} \propto \frac{1}{\omega} \quad (2.111)$$

Sembrerebbe allora che $\underline{E}$ diverga per ω che tende a 0, e questo appare evidentemente un paradosso. In realtà occorre osservare che nel campo elettrostatico le cariche elettriche sono ferme, e dunque il termine di corrente $\underline{J}_e$ legato a cariche elettriche in moto è nullo. Il problema va riformulato introducendo esplicitamente la densità volumica di carica elettrica $q(\underline{r}, t)$ (misurata in C m^{-3}), a norma dell'equazione di continuità $\nabla \cdot \underline{J}_e + \frac{\partial}{\partial t} q = 0$. Tale equazione mette in evidenza che le due sorgenti non sono indipendenti: spesso si utilizza $\underline{J}_e$ per lo stesso motivo per cui in fluidodinamica un fluido viene studiato dal punto di vista macroscopico e statistico,

e non studiando il moto di ogni sua singola particella. Nel dominio della frequenza, e poi nel dominio spettrale, si ha

$$\nabla \cdot \underline{J}_e(\underline{r}, \omega) + j\omega q(\underline{r}, \omega) = 0 \quad \xrightarrow{\text{FT}^3} \quad -j\underline{k} \cdot \underline{\tilde{J}}_e(\underline{k}, \omega) + j\omega \tilde{q}(\underline{k}, \omega) = 0 \quad (2.112)$$

Ponendo $\underline{J}_m = 0$ e ricordando che

$$\underline{\tilde{G}}(\underline{k}) = \left\{ \underline{I} + \frac{1}{\omega^2 \epsilon \mu} (-j\underline{k})(-j\underline{k}) \right\} \underline{\tilde{\Psi}}(\underline{k}) \quad (2.113)$$

si ha

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{E}}(\underline{k}) &= -j\omega \mu \underline{\tilde{G}}(\underline{k}) \cdot \underline{\tilde{J}}_e(\underline{k}) = \\ &= -j\omega \mu \underline{\tilde{\Psi}}(\underline{k}) \cdot \underline{\tilde{J}}_e(\underline{k}) - j\omega \mu \frac{1}{\omega^2 \epsilon \mu} (-j\underline{k})(-j\underline{k}) \cdot \underline{\tilde{J}}_e(\underline{k}) \underline{\tilde{\Psi}}(\underline{k}) = \\ &= -j\omega \mu \underline{\tilde{\Psi}}(\underline{k}) \cdot \underline{\tilde{J}}_e(\underline{k}) - \frac{1}{\epsilon} (-j\underline{k}) \underline{\tilde{\Psi}}(\underline{k}) \tilde{q}(\underline{k}) \end{aligned} \quad (2.114)$$

Si può passare, a questo punto, nel dominio spaziale ottenendo

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega \mu \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \Psi(\underline{r} - \underline{r}') \underline{J}_e(\underline{r}') - \frac{1}{\epsilon} \nabla \left[\int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \Psi(\underline{r} - \underline{r}') q(\underline{r}') \right] \quad (2.115)$$

Passando al limite si ottiene facilmente

$$\Psi_0(r) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \Psi(r) = \frac{1}{4\pi r} \quad (2.116)$$

$$\underline{E}_0(\underline{r}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{E}(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \left[\int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \frac{1}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} q(\underline{r}') \right] \quad (2.117)$$

cioè

$$\underline{E}_0(\underline{r}) = -\nabla \left[\int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \frac{1}{4\pi \epsilon |\underline{r} - \underline{r}'|} q(\underline{r}') \right] \quad (2.118)$$

Come ci aspettavamo abbiamo ottenuto l'espressione del campo elettrostatico, in cui la quantità $\frac{1}{4\pi \epsilon |\underline{r} - \underline{r}'|} q(\underline{r}')$ è il potenziale generato da una carica elettrica elementare. Il suo integrale rappresenta dunque la sovrapposizione dei contributi di potenziale dovuti alle singole cariche, quindi si può definire come *potenziale scalare* nel modo seguente:

$$\Phi(\underline{r}) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \frac{1}{4\pi \epsilon |\underline{r} - \underline{r}'|} q(\underline{r}') = -\frac{1}{j\omega \epsilon} \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \Psi_0(\underline{r} - \underline{r}') \nabla \cdot \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (2.119)$$

in modo da porre l'equazione dell'elettrostatica in forma di campo irrotazionale

$$\underline{E}_0(\underline{r}) = -\nabla \Phi(\underline{r}) \quad (2.120)$$

2.4 Formulazione del campo elettromagnetico in termini di potenziali

Dunque abbiamo visto come le relazioni che si ottengono in campo vicino sono perfettamente coerenti con le equazioni del campo statico quando $\omega \rightarrow 0$, cioè nel caso di campo quasi-statico. Dall'analisi delle (2.114) e (2.115) notiamo che in generale il campo elettrico ha sempre, $\forall \omega$, un termine irrotazionale (il termine di gradiente nella (2.115)) e che è presente un ulteriore termine che compare a frequenza non nulla; scriviamo allora

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega \underline{A}(\underline{r}) - \nabla \Phi(\underline{r}) \quad (2.121)$$

dove

$$\Phi(\underline{r}) \equiv \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \Psi(\underline{r} - \underline{r}') q(\underline{r}') \quad ; \quad \tilde{\Phi}(\underline{k}) \equiv \frac{1}{\epsilon} \tilde{\Psi}(\underline{k}) \tilde{q}(\underline{k}) \quad (2.122)$$

e

$$\underline{A}(\underline{r}) \equiv \mu \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \Psi(\underline{r} - \underline{r}') \underline{J}_e(\underline{r}') \quad ; \quad \tilde{\underline{A}}(\underline{k}) = \mu \tilde{\Psi}(\underline{k}) \tilde{\underline{J}}_e(\underline{k}) \quad (2.123)$$

Il termine non irrotazionale $\underline{A}(\underline{r})$ nella (2.121) è intimamente legato al campo magnetico $\underline{H}$, cioè agli effetti elettromagnetici propri dei campi dinamici. Infatti dalla (2.60) e dalla seconda delle (2.91) abbiamo

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{H}}(\underline{k}) &= (-j\underline{k} \times \tilde{\underline{G}}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(\underline{k}) = \tilde{\underline{G}}'(\underline{k}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(\underline{k}) = \\ &= -j\underline{k} \times \underline{\underline{I}} \tilde{\Psi}(\underline{k}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(\underline{k}) = -j\underline{k} \times \tilde{\underline{J}}_e(\underline{k}) \tilde{\Psi}(\underline{k}) \end{aligned} \quad (2.124)$$

ovvero, per confronto con la (2.123)

$$\tilde{\underline{H}}(\underline{k}) = \frac{1}{\mu} (-j\underline{k} \times \tilde{\underline{A}}(\underline{k})) \quad (2.125)$$

In analogia al potenziale elettrico nel caso elettrostatico il vettore $\underline{A}(\underline{r})$ prende il nome di *potenziale vettore*.

In generale dunque si può concludere che

$$\begin{cases} \underline{E}(\underline{r}) = -j\omega \underline{A}(\underline{r}) - \nabla \Phi(\underline{r}) \\ \underline{H}(\underline{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{A}(\underline{r}) \end{cases} \quad (2.126)$$

Come noto il potenziale scalare $\Phi(\underline{r})$ non è definito in modo univoco e si può vedere che tale non univocità sussiste anche per il potenziale vettore. Infatti considerando un potenziale vettore $\underline{A}' = \underline{A} + \nabla U$ si ha $\underline{H}' = \underline{H}$ ma ancora $\underline{E}' \neq \underline{E}$; però se si pone $\Phi' = \Phi - j\omega U$, allora si ha effettivamente anche $\underline{E}' = \underline{E}$. Ciò è una diretta conseguenza del fatto che due vettori che differiscono per un gradiente hanno lo stesso rotore, e due scalari che differiscono per una quantità costante hanno lo stesso gradiente. Ogni particolare scelta che si può fare sui termini da aggiungere ai due potenziali è detta *gauge*, e la scelta più usuale nei problemi di irradiazione è detta *gauge di Lorentz*, vale a dire la seguente:

$$\nabla \cdot \underline{A} + j\omega(\epsilon\mu\Phi) = 0 \quad (2.127)$$

Con il gauge di Lorentz si dimostra che le equazioni d'onda di Maxwell equivalgono a due equazioni di Helmholtz del tipo

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k_0^2) \Phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon} q(\underline{r}) \\ (\nabla^2 + k_0^2) \underline{A}(\underline{r}) = -\mu \underline{J}_e(\underline{r}) \end{cases} \quad (2.128)$$

Si tratta di due equazioni che in spazio libero (dove non si considerano le condizioni al contorno) sono disaccoppiate, e che costituiscono lo stesso risultato che si era ottenuto mediante la rappresentazione spettrale.

Notiamo che mettendo insieme potenziale scalare e potenziale vettore si ottengono quattro grandezze scalari: si parla di *quadripotenziale*. Uno dei modi di risolvere le equazioni di Maxwell è proprio quello che presuppone la formulazione del campo elettromagnetico in termini di potenziali, strada che noi non abbiamo seguito, preferendo il metodo della funzione di Green. Il gauge di Lorentz permette allora di ottenere esattamente i potenziali che avevamo ottenuto in precedenza, mentre i campi sono comunque gli stessi per il noto teorema di unicità.

Ricordiamo che questa formulazione con i potenziali è stata fatta nel caso $\underline{J}_m = 0$. Quando tale non sia il caso è necessario introdurre opportuni potenziali duali (uno scalare per le caratteristiche elettriche e uno vettoriale per le caratteristiche magnetiche).

Sottolineiamo infine che la funzione di Helmholtz compare negli integrali che esprimono i potenziali, dunque assume, fra l'altro, il ruolo di funzione di Green per i potenziali: ciò giustifica il nome di “funzione di Green scalare” che le avevamo attribuito.

2.5 Forme approssimate del campo di una sorgente estesa

2.5.1 Irradiazione di una sorgente generica e regione di Fraunhofer

Consideriamo ora il campo irradiato da una sorgente di dimensioni finite, a “grande” distanza dalla sorgente stessa; i criteri per valutare questa distanza sono legati alle dimensioni caratteristiche della sorgente e alle approssimazioni che si vogliono fare sulla funzione di Green. Supponiamo dunque di avere una regione Ω , avente centroide $\underline{Q}$ e dimensione caratteristica h , in cui sono racchiuse le sorgenti $\underline{J}_e$ e $\underline{J}_m$ del campo; h è cioè il diametro della sfera minima, avente centro $\underline{Q}$, che contiene tutte le sorgenti:

$$\frac{h}{2} = \max_{\underline{r}' \in \Omega} |\underline{r}'| \quad (2.129)$$

Supponiamo di voler valutare il campo in un punto $\underline{P}$ individuato dal vettore $\underline{r} = \underline{P} - \underline{Q}$ rispetto all'origine $\underline{Q}$ del riferimento, come in Fig. 2.5. L'espressione esatta del campo elettrico irradiato dalla sorgente Ω ed osservato nel punto $\underline{r}$ è data da

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega\mu \int_{\Omega} d^3\underline{r}' \underline{G}(\underline{r} - \underline{r}') \cdot \underline{J}_e(\underline{r}') - \int_{\Omega} d^3\underline{r}' \underline{G}'(\underline{r} - \underline{r}') \cdot \underline{J}_m(\underline{r}') \quad (2.130)$$

Sfruttando l'ipotesi di essere a grande distanza dalla sorgente ovvero ad una distanza $d \gg h$, possiamo introdurre delle approssimazioni sulla funzione di Green $\underline{G}$. Ciascuno dei due integrali

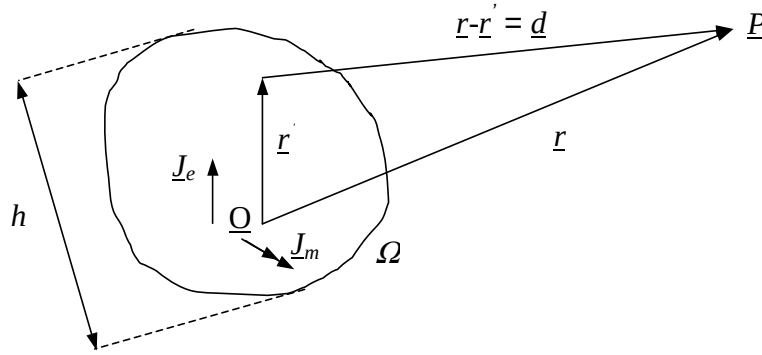


Figura 2.5. Volume Ω racchiudente le sorgenti.

di irradiazione può essere visto come la somma di molti contributi elementari, ciascuno dovuto ad una sorgente elementare $d^3\mathbf{r}' \mathbf{J}_e(\mathbf{r}')$, come nel primo integrale della (2.130), avente le dimensioni di un momento elettrico (infatti $d^3\mathbf{r}'$ si misura in m^3 e $\mathbf{J}_e(\mathbf{r}')$ in A m^{-2}), oppure di un momento magnetico, come nel secondo integrale della (2.130). Tali contributi sono in funzione del vettore $\mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, che indica la posizione dell'osservatore vista dal punto $\mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{r}'$ detto *punto di sorgente* (o anche *punto potenziante*) mentre $\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{r}$ è il *punto di osservazione* (anche detto *punto potenziato*). Come mostrato in Fig. 2.6, la diadica di Green nella (2.130) è quindi $\underline{\underline{G}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \underline{\underline{G}}(\mathbf{d})$. Cerchiamo ora come estrarla dal segno di integrale per semplificare quest'ultimo. La diadica data dalla (2.84) ha qui espressione:

$$\underline{\underline{G}}(\mathbf{d}) = [A(k_0 d) \hat{\mathbf{d}} \hat{\mathbf{d}} + B(k_0 d) (\hat{\theta}_d \hat{\theta}_d + \hat{\phi}_d \hat{\phi}_d)] \Psi(d) \quad (2.131)$$

dove le funzioni $A(k_0 d)$ e $B(k_0 d)$ sono date dalla (2.85) e $\Psi(d)$ dalla (2.68).

Introduciamo ora un'approssimazione di tipo geometrico: allontanandosi dalla sorgente in modo da poterla considerare puntiforme, cioè in modo tale che l'angolo solido sotto cui è vista dal punto di osservazione $\mathbf{P}$ sia molto piccolo, si nota che l'angolo δ che discrimina le direzioni $\mathbf{r}$ e $\mathbf{d}$ tende ad annullarsi, come si può notare dalla Fig. 2.7. Essendo $\frac{h}{2} = \max_{\mathbf{r}' \in \Omega} |\mathbf{r}'|$,

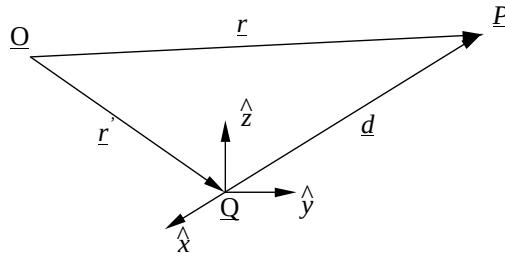
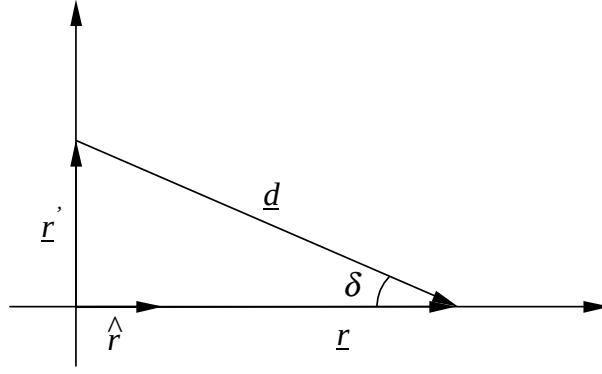


Figura 2.6. Sistema di riferimento centrato nel punto di sorgente $\mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{r}'$.

avremo $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{r}} + \mathcal{O}(\frac{h/2}{r})$ (infatti l'errore è proporzionale alla $\tan \delta$). L'entità dell'errore dipende quindi dalla distanza del punto di osservazione $\mathbf{r}$ e per $r \gg h$ si ha $\hat{\mathbf{d}} \simeq \hat{\mathbf{r}}$, possiamo quindi approssimare i versori $\hat{\mathbf{d}}$, $\hat{\phi}_d$ e $\hat{\theta}_d$ contenuti nella diade $\underline{\underline{G}}$ con $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\phi}$ e $\hat{\theta}$, ossia

$$\hat{\mathbf{d}} \simeq \hat{\mathbf{r}}$$

Figura 2.7. Approssimazione di $\underline{d}$ con $\underline{r}$.

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_d &\simeq \hat{\phi} \\ \hat{\theta}_d &\simeq \hat{\theta}\end{aligned}$$

A questo punto il nostro obbiettivo è quello di approssimare le due funzioni $\frac{1}{d}$ e $e^{-jk_0 d}$ contenute nell'espressione di $\underline{G}(\underline{d})$ (eq.(2.131)). Considerando $\underline{d} = \underline{d}(\underline{r}, \underline{r}')$, vogliamo determinare l'approssimazione necessaria per eliminare la dipendenza da $\underline{r}'$. Scriviamo allora

$$d = |\underline{r} - \underline{r}'| = \sqrt{(\underline{r} - \underline{r}') \cdot (\underline{r} - \underline{r}')} = r \left| \hat{r} - \frac{\underline{r}'}{r} \right| = r(1 + \epsilon) \quad (2.132)$$

dove

$$\epsilon \leq \frac{1}{r} \max_{\underline{r}' \in \Omega} |\underline{r}'| = \frac{h/2}{r} \quad (2.133)$$

è l'errore introdotto approssimando d con r . Il caso peggiore si presenta quando $\underline{r}'$ è opposto ad $\underline{r}$ e $d = r + r'$. Data la maggiorazione (2.129) si può scrivere allora

$$d = r + \mathcal{O}\left(\frac{h}{2r}\right) \quad (2.134)$$

Per quanto riguarda il termine di ampiezza ($1/d$) abbiamo

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \frac{1}{1 + \epsilon} \quad (2.135)$$

ovvero, sviluppando in serie

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} (1 - \epsilon + \dots) = \frac{1}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{h}{r}\right) \quad (2.136)$$

Notiamo che l'errore può essere reso piccolo a piacere semplicemente imponendo $r \gg h$. Grazie a questa approssimazione abbiamo

$$A(k_0 d) \simeq A(k_0 r)$$

$$B(k_0 d) \simeq B(k_0 r)$$

Per quanto riguarda il termine di fase, abbiamo invece

$$d = r + \xi ; |\xi| \leq \frac{h}{2} \Rightarrow k_0 d = k_0 r + k_0 \xi \quad (2.137)$$

dove $k_0 \xi$ rappresenta l'errore di fase maggiorabile come

$$k_0 \xi \leq k_0 \frac{h}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{h}{2} \quad (2.138)$$

Tale errore **non** dipende dalla distanza di osservazione, cioè allontanandosi a piacere dalla sorgente non si riesce mai ad ottenere una limitazione per questo termine. Per questo motivo l'approssimazione di ordine zero, $d = r$, non può essere sfruttata per la fase, a meno che $h/\lambda \ll 1$ (è un caso quasi banale in cui anche l'esponenziale nella (2.131) si approssima ad 1, che considereremo in seguito). Ponendo quindi $D(\underline{r}, \underline{r}') = d - r$ possiamo comunque scrivere il campo estraendo dall'integrale la diade di Green e lasciando al suo interno ciò che rimane del termine di fase in funzione di D . Avremo quindi

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega\mu \underline{\underline{G}}(\underline{r}) \cdot \int_{\Omega} d^3 \underline{r}' e^{-jk_0 D} \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (2.139)$$

Questa approssimazione rimane valida anche per gli altri termini del campo elettrico e magnetico per cui avremo:

$$\underline{E}(\underline{r}) \simeq -j\omega\mu \underline{\underline{G}}(\underline{r}) \cdot \int_{\Omega} d^3 \underline{r}' e^{-jk_0 D} \underline{J}_e(\underline{r}') - \underline{\underline{G}}'(\underline{r}) \cdot \int_{\Omega} d^3 \underline{r}' e^{-jk_0 D} \underline{J}_m(\underline{r}') \quad (2.140)$$

$$\underline{H}(\underline{r}) \simeq -j\omega\epsilon \underline{\underline{G}}(\underline{r}) \cdot \int_{\Omega} d^3 \underline{r}' e^{jk_0 D} \underline{J}_m(\underline{r}') + \underline{\underline{G}}'(\underline{r}) \cdot \int_{\Omega} d^3 \underline{r}' e^{jk_0 D} \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (2.141)$$

Cerchiamo ora di approssimare il termine di fase. Dato che comunque $\frac{r'}{r} \leq \frac{h/2}{r} \ll 1$, cercheremo uno sviluppo di d in serie di Taylor in funzione di $\frac{r'}{r}$. Scriviamo

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(\underline{r} - \underline{r}') \cdot (\underline{r} - \underline{r}')} = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2 \underline{r} \cdot \underline{r}'} = \\ &= r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r^2}} = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 (\hat{r} \cdot \hat{r}') \frac{r'}{r}} \end{aligned} \quad (2.142)$$

e ponendo

$$x = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 (\hat{r} \cdot \hat{r}') \frac{r'}{r} = \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r}\right) \quad (2.143)$$

possiamo determinare lo sviluppo in serie di Taylor della radice

$$d = r \sqrt{1 + x} = r \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots\right) \quad (2.144)$$

Arrestando lo sviluppo al termine quadratico per l'errore di approssimazione così compiuto possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
 d &\simeq r + \frac{1}{2}r \left[\left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2(\hat{r} \cdot \hat{r}') \frac{r'}{r} \right] - \frac{r}{8} \left[\left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2(\hat{r} \cdot \hat{r}') \frac{r'}{r} \right]^2 = \\
 &= r + \frac{1}{2}r \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - (\hat{r} \cdot \hat{r}') r' - \frac{r}{8} \left[\left(\frac{r'}{r} \right)^4 + 4(\hat{r} \cdot \hat{r}')^2 \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 4 \left(\frac{r'}{r} \right)^3 (\hat{r} \cdot \hat{r}') \right] = \\
 &= r - \hat{r} \cdot \underline{r}' + \frac{1}{2}r [1 - (\hat{r} \cdot \hat{r}')^2] \left(\frac{r'}{r} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{h}{r} \right)^3
 \end{aligned} \tag{2.145}$$

Se inoltre poniamo

$$\Delta r = r \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 [1 - (\hat{r} \cdot \hat{r}')^2] \tag{2.146}$$

otteniamo la seguente espressione per $k_0 d$:

$$k_0 d = k_0 r - k_0 \hat{r} \cdot \underline{r}' + k_0 \Delta r + \mathcal{O} \left(\frac{h}{r} \right)^3 \tag{2.147}$$

Arrestandoci al termine lineare otteniamo la nuova approssimazione per d

$$d \simeq r - \hat{r} \cdot \underline{r}' \tag{2.148}$$

Imponiamo, infine, una limitazione all'errore $\Delta\Phi$ che si commette con la (2.148) imponendo $\Delta\Phi = k_0 \Delta r \leq \delta\pi$ (dove δ è un numero piccolo), e dunque

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{1}{2} r \left(\frac{r'}{r} \right)^2 [1 - (\hat{r} \cdot \hat{r}')^2] \tag{2.149}$$

Sapendo che $r' \leq \frac{h}{2}$ e che $\hat{r} \cdot \hat{r}' \leq 1$ ovvero $[1 - (\hat{r} \cdot \hat{r}')^2] \leq 1$ abbiamo

$$\Delta\Phi \leq \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{1}{2} \frac{h^2/4}{r} \leq \delta\pi \Rightarrow \frac{h^2}{\lambda_0 r} \leq 4\delta \tag{2.150}$$

La scelta convenzionale che si fa per δ è $\delta = \frac{1}{8}$, cioè $\Delta\Phi \leq \frac{\pi}{8}$ e quindi $\frac{h^2}{\lambda_0 r} \leq \frac{1}{2}$, ovvero

$$\frac{2h^2}{\lambda_0 r} \leq 1 \Rightarrow r \geq \frac{2h^2}{\lambda_0} \tag{2.151}$$

La distanza $r_{min} = \frac{2h^2}{\lambda_0}$ viene detta *distanza di Fraunhofer* e la regione $r > r_{min}$ regione di *Fraunhofer*. Si noti che la scelta $\delta\pi = \frac{\pi}{8}$ è un limite superiore all'errore di fase, in quanto gli

errori di fase tendono comunque, in genere, a cancellarsi. Se è quindi verificata la condizione (2.151) è valida la seguente relazione asintotica:

$$e^{-jk_0 D} \simeq e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \quad (2.152)$$

e quindi possiamo scrivere

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega\mu \underline{G}(\underline{r}) \int_{\Omega} d^3 \underline{r}' e^{-jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \cdot \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (2.153)$$

Il discorso fatto si può ripetere per le sorgenti magnetiche e possiamo quindi generalizzare a tutti i termini della formula:

$$\underline{E}(\underline{r}) \simeq -j\omega\mu \underline{G}(\underline{r}) \int_{\Omega} d^3 \underline{r}' e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \underline{J}_e(\underline{r}') - \underline{G}(\underline{r})' \cdot \int_{\Omega} d^3 \underline{r}' e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \underline{J}_m(\underline{r}') \quad (2.154)$$

$$\underline{H}(\underline{r}) \simeq -j\omega\epsilon \underline{G}(\underline{r}) \int_{\Omega} d^3 \underline{r}' e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \underline{J}_m(\underline{r}') + \underline{G}(\underline{r})' \cdot \int_{\Omega} d^3 \underline{r}' e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (2.155)$$

Si noti che i termini di sorgente sono presenti sotto il segno di integrale nella forma

$$\int_{\Omega} d^3 \underline{r}' e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \underline{J}_{\alpha}(\underline{r}') \quad (2.156)$$

dove α può essere il pedice e oppure il pedice m . Il dominio di integrazione può essere esteso indifferentemente da Ω a tutto lo spazio, in quanto le sorgenti sono comunque limitate in Ω , quindi

$$\int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' e^{+jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \underline{J}_{\alpha}(\underline{r}') = \text{FT}^3 \{ \underline{J}_{\alpha} \} \Big|_{\underline{k}=k_0 \hat{r}} = \tilde{\underline{J}}_{\alpha}(k_0 \hat{r}) \quad (2.157)$$

Quindi è possibile legare le proprietà del campo irradato a quelle della trasformata di Fourier delle sorgenti calcolate in $k_0 \hat{r}$.

2.5.2 Campo lontano

Alla luce di quanto detto sopra possiamo dare un'ulteriore riscrittura del campo come

$$\underline{E}(\underline{r}) \simeq -j\omega\mu \underline{G}(\underline{r}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) - \underline{G}'(\underline{r}) \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) \quad (2.158)$$

$$\underline{H}(\underline{r}) \simeq -j\omega\epsilon \underline{G}(\underline{r}) \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) + \underline{G}'(\underline{r}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) \quad (2.159)$$

dove

$$\tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (2.160)$$

$$\tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \underline{J}_m(\underline{r}') \quad (2.161)$$

Assumiamo adesso che $d \gg \lambda$ (campo lontano) e quindi $k_0 d \gg 1$, il che implica $\underline{G}(\underline{r}) \simeq \underline{I}_{t\hat{r}} \Psi(r)$ e $\underline{G}'(\underline{r}) \simeq -jk_0 \hat{r} \times \underline{I} \Psi(r)$, avendo trascurato i termini $\frac{1}{k_0 r}$. Introducendo le notazioni

$$\underline{G}_a(\underline{r}) \equiv \Psi(r) \underline{I}_{t\hat{r}} ; \quad \underline{G}'_a(\underline{r}) \equiv -jk_0 \hat{r} \times \underline{I} \Psi(r) \quad (2.162)$$

possiamo riscrivere le (2.158) e (2.159) come segue

$$\underline{E}(\underline{r}) \simeq -j\omega\mu \underline{G}_a(\underline{r}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) - \underline{G}'_a(\underline{r}) \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) \quad (2.163)$$

$$\underline{H}(\underline{r}) \simeq -j\omega\epsilon \underline{G}_a(\underline{r}) \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) + \underline{G}'_a(\underline{r}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) \quad (2.164)$$

espressione del campo elettrico e magnetico in condizione di campo lontano.

2.5.3 Sorgente piccola e dipolo elementare

Vogliamo adesso specializzare le conclusioni generali finora ricavate nel contesto di situazioni particolari sempre più complesse, al fine di introdurre lo studio delle antenne.

Iniziamo con il caso più semplice possibile considerando un'antenna le cui dimensioni sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda $h \ll \lambda_0$. Questa caratteristica semplifica i calcoli nell'integrale di irradiazione. Il campo elettrico e quello magnetico sono espressi rispettivamente dalla (2.158) e dalla (2.159). Dato che $h \ll \lambda_0$ il termine $e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'}$ che compare nell'espressione di $\underline{\tilde{J}}_e(k_0 \hat{r})$ e $\underline{\tilde{J}}_m(k_0 \hat{r})$ può essere trascurato. Infatti sotto questa ipotesi

$$k_0 \hat{r} \cdot \underline{r}' \leq k_0 \frac{h}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{h}{2} \ll 1 \implies e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \simeq 1 \quad (2.165)$$

Le sorgenti equivalenti, date dalla (2.160) e dalla (2.161), diventano

$$\underline{\tilde{J}}_e(k_0 \hat{r}) \simeq \int_{R^3} d^3 \underline{r}' \underline{J}_e(\underline{r}') = \underline{M}_e \quad (2.166)$$

$$\underline{\tilde{J}}_m(k_0 \hat{r}) \simeq \int_{R^3} d^3 \underline{r}' \underline{J}_m(\underline{r}') = \underline{M}_m \quad (2.167)$$

avendo definito i vettori

$$\underline{M}_e = \int_{\Omega} d^3 \underline{r}' \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (2.168)$$

$$\underline{M}_m = \int_{\Omega} d^3 \underline{r}' \underline{J}_m(\underline{r}') \quad (2.169)$$

detti rispettivamente *momento elettrico*, che ha evidentemente le dimensioni fisiche di $A \cdot m$, e *momento magnetico*, con le dimensioni fisiche di $V \cdot m$. Dunque in luogo delle trasformate si hanno i momenti elettrico e magnetico ordinari. Per tale ragione, in virtù del termine “di peso” $e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'}$ nelle $\underline{\tilde{J}}_e$, $\underline{\tilde{J}}_m$ in (2.160) e in (2.161), questi ultimi si possono considerare momenti elettrico e magnetico “generalizzati”.

Se consideriamo, ad esempio, $\underline{J}_m = 0$, il campo elettrico e magnetico diventano

$$\underline{E}(\underline{r}) \simeq -j\omega\mu \underline{G}(\underline{r}) \cdot \underline{M}_e$$

$$\underline{H}(\underline{r}) \simeq \underline{G}'(\underline{r}) \cdot \underline{M}_e$$

Per semplicità abbiamo considerato un'antenna centrata, cioè abbiamo considerato un sistema di riferimento centrato nel centroide $\underline{Q}$ della regione che contiene la struttura. Se quest'ultima non è centrata, cioè si sceglie, ad esempio, l'origine del riferimento in un punto $\underline{Q}' = \underline{Q} + \underline{r}_0$ all'esterno della regione che contiene l'antenna si ottengono le formule

$$\begin{cases} \underline{E}(\underline{r}) \simeq -j\omega\mu \underline{G}(\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{M}_e \\ \underline{H}(\underline{r}) \simeq \underline{G}'(\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{M}_e \end{cases} \quad (2.170)$$

dove $\underline{r}_0$ è il vettore posizione del centroide $\underline{Q}'$ della regione Ω rispetto al nuovo riferimento. Ricordando inoltre che (nel caso di $\underline{J}_m = 0$ nelle (2.158) e (2.159)) $\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega\mu \underline{G}(\underline{r}) * \underline{J}_e(\underline{r})$ e $\underline{H}(\underline{r}) = \underline{G}'(\underline{r}) * \underline{J}_e(\underline{r})$, si conclude che un'antenna le cui dimensioni sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda, produce lo stesso campo di una sorgente matematicamente puntiforme,

cioè descritta da $\underline{J}_e(\underline{r}) = \underline{M}_e \delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$, purché, però, si osservi il campo a distanza sufficiente dalla sorgente. Una sorgente puntiforme è detta abitualmente *dipolo elettrico elementare* di cui parleremo più dettagliatamente nel par. 2.6. Alla luce di quanto abbiamo detto fino ad ora, appare chiaro che il dipolo elementare è rappresentato matematicamente da una $\delta(\underline{r})$, mentre fisicamente è un'antenna piccola rispetto a λ . Un esempio tipico di realizzazione di dipolo elementare è un filo rettilineo conduttore di lunghezza Δl , diretto per semplicità lungo z ; in tal caso la sorgente si può porre nella forma

$$\underline{J}_e(x, y, z) \simeq \delta(x) \delta(y) I(z) \hat{z} \quad (2.171)$$

da cui

$$\underline{M}_e = \hat{z} \int_{\Delta l/2}^{\Delta l/2} dz I(z) \quad (2.172)$$

e, se $I(z) = \text{cost} = I$, si ha $|\underline{M}_e| = I \Delta l$.

Quanto detto sinora vale sia in campo lontano ($r \gg \lambda$), sia nelle regioni intermedie e in campo vicino ($r \ll \lambda$), purché $h = \Delta l \ll r$, ovvero per poter considerare puntiforme una sorgente bisogna osservare il campo ad una distanza $\underline{r}$ molto maggiore della dimensione caratteristica $h = \Delta l$ della sorgente. Si faccia comunque attenzione al fatto che la condizione $r \gg \Delta l$ **non** significa necessariamente che siamo in campo lontano, perché nella disequaglianza r non è confrontato alla lunghezza d'onda. Ad esempio se siamo alla frequenza $f = 1$ MHz e ci troviamo ad una distanza di $r = 10$ m dal dipolo di lunghezza $\Delta l = 1$ m si ha $\frac{\Delta l}{r} \ll 1$, ma anche $r \ll \lambda_0$ perché $\lambda_0 = 3 \cdot 10^2$ m.

2.5.4 Proprietà di direttività e vettori di irradiazione

Possiamo notare che l'espressione del campo elettromagnetico in campo lontano nelle (2.158) e (2.159) è molto simile a quella ottenuta per un dipolo elettrico elementare, per il quale $\underline{J}_e = \underline{M}_e \delta(\underline{r})$, $\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega\mu \underline{G}_a(\underline{r}) \cdot \underline{M}_e$. Questa stretta analogia è dovuta al fatto che il campo viene osservato da un punto sufficientemente lontano, sì da considerare la sorgente come puntiforme. Ma si deve notare che c'è una fondamentale differenza fra il dipolo elementare e la sorgente estesa: se consideriamo, senza perdere in generalità, il caso $\underline{J}_m = 0$ si nota che la trasformata della corrente calcolata in $k_0 \hat{r}$, anche detta *momento elettrico equivalente*, non è costante, ma dipende dalla direzione di osservazione $\hat{r}$, cioè da (θ, ϕ) . Si tratta dell'importante proprietà di *direttività*: l'intensità del campo irradiato a distanza fissa dalla sorgente può essere marcatamente diversa da una direzione all'altra. Per una sorgente estesa dobbiamo pertanto parlare di momento elettrico equivalente, la cui intensità dipende dalla direzione di osservazione.

Risulta conveniente separare, nell'espressione del campo elettromagnetico, il termine dipendente solo dalla direzione. Considerando l'espressione di $\underline{E}(\underline{r})$ ed $\underline{H}(\underline{r})$ abbiamo¹

$$\underline{E}(\underline{r}) = \left\{ -j\omega\mu \underline{I}_{\underline{r}\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) + jk_0 \left(\hat{r} \times \underline{I} \right) \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) \right\} \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \quad (2.173)$$

$$\underline{H}(\underline{r}) = \left\{ -j\omega\epsilon \underline{I}_{\underline{r}\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) - jk_0 \left(\hat{r} \times \underline{I} \right) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) \right\} \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \quad (2.174)$$

¹D'ora in poi useremo il simbolo "=" anziché il simbolo "≈" per le relazioni asintotiche di campo lontano esprimenti il campo elettrico e magnetico.

Il termine in parentesi graffe esprime la dipendenza dei campi dalla direzione $\hat{r} \rightarrow (\theta, \phi)$. Inoltre, fissata una direzione di osservazione, il campo assume la forma di onda sferica $\frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r}$. Cerchiamo quindi di riscrivere il campo in una forma che evidenzi il comportamento appena descritto. Sfruttando la relazione

$$\omega\mu = Z_0 k_0 = Z_0 \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (2.175)$$

otteniamo

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega\mu \left\{ \underline{I}_{\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) + \frac{j k_0}{-j\omega\mu} \hat{r} \times \underline{I} \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) \right\} \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \quad (2.176)$$

ovvero

$$\underline{E}(\underline{r}) = -jZ_0 \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \underline{P}_e(\hat{r}) = -j \frac{Z_0}{2r\lambda_0} e^{-jk_0 r} \underline{P}_e(\hat{r}) \quad (2.177)$$

avendo posto

$$\begin{aligned} \underline{P}_e(\hat{r}) &= \underline{I}_{\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) + \frac{j k_0}{-j\omega\mu} (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) = \\ &= \underline{I}_{\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) - \frac{1}{Z_0} (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) \end{aligned} \quad (2.178)$$

Analogamente per il campo magnetico,

$$\underline{H}(\underline{r}) = -j\omega\epsilon \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \underline{P}_m(\hat{r}) = -j \frac{Y_0}{2r\lambda_0} e^{-jk_0 r} \underline{P}_m(\hat{r}) \quad (2.179)$$

dove il vettore $\underline{P}_m(\hat{r})$ è dato da

$$\begin{aligned} \underline{P}_m(\hat{r}) &= \underline{I}_{\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) + \frac{-j k_0}{-j\omega\epsilon} (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) = \\ &= \underline{I}_{\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) + Z_0 \hat{r} \times \underline{I} \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) \end{aligned} \quad (2.180)$$

avendo posto $\omega\epsilon = \frac{k_0}{Z_0} = Y_0 \frac{2\pi}{\lambda_0}$. I vettori $\underline{P}_e(\hat{r})$ e $\underline{P}_m(\hat{r})$ sono detti *vettori di irradiazione* o *vettori di Schelkunoff* e contengono tutta l'informazione legata alle caratteristiche direttive del campo irradiato da un'antenna, in quanto dipendono dalla sola direzione $\hat{r}$. Osservando le espressioni (2.178) (2.180) notiamo che $\underline{P}_e(\hat{r})$ e $\underline{P}_m(\hat{r})$ sono legati dalla seguente relazione:

$$\underline{P}_m(\hat{r}) = Z_0 \hat{r} \times \underline{P}_e(\hat{r}) \quad (2.181)$$

2.5.5 Relazione di impedenza e vettore di Poynting

Si è vista l'analogia del campo irradiato da un dipolo e da una sorgente qualsiasi, in presenza del termine di momento elettrico equivalente, cioè

$$\underline{M}_e \longleftrightarrow \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) \quad (2.182)$$

Ora, dal momento che nel dipolo è stata riscontrata la validità della relazione di impedenza che lega $\underline{E}$ e $\underline{H}$, possiamo pensare che tale relazione valga anche per le sorgenti estese. Usando l'espressione del campo nella forma (2.173) e sapendo che $\Psi(r) = \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r}$ possiamo dunque scrivere

$$\hat{r} \times \underline{E}(\underline{r}) = \left\{ -j\omega\mu \hat{r} \times \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0\hat{r}) + \hat{r} \times \left[jk_0\hat{r} \times \tilde{\underline{J}}_m(k_0\hat{r}) \right] \right\} \Psi(r) \quad (2.183)$$

Separando i due termini abbiamo

$$\hat{r} \times \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0\hat{r}) = \hat{r} \times \underline{I} \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0\hat{r}) = \hat{r} \times \tilde{\underline{J}}_e(k_0\hat{r}) \quad (2.184)$$

$$\begin{aligned} \hat{r} \times (\hat{r} \times \tilde{\underline{J}}_m) &= \hat{r} \times (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot \tilde{\underline{J}}_m = \left[(\hat{r} \cdot \underline{I}) \hat{r} - (\hat{r} \cdot \hat{r}) \underline{I} \right] \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0\hat{r}) = \\ &= \left[\hat{r}\hat{r} - \underline{I} \right] \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0\hat{r}) = -\underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0\hat{r}) \end{aligned} \quad (2.185)$$

La (2.183) può allora essere scritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \hat{r} \times \underline{E}(\underline{r}) &= \left\{ -j\omega\mu (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0\hat{r}) - jk_0 \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0\hat{r}) \right\} \Psi(r) = \\ &= -j\omega\mu \left\{ (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0\hat{r}) + \frac{k_0}{\omega\mu} \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0\hat{r}) \right\} \Psi(r) \end{aligned} \quad (2.186)$$

Per ricondurci alla forma del campo magnetico vista in (2.174) dividiamo ambo i membri dell'equazione precedente per Z_0 , quindi

$$\frac{1}{Z_0} \hat{r} \times \underline{E}(\underline{r}) = \frac{-j\omega\mu}{Z_0} \Psi(r) \left\{ (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0\hat{r}) + \frac{1}{Z_0} \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0\hat{r}) \right\} \Rightarrow \quad (2.187)$$

$$\Rightarrow Y_0 \hat{r} \times \underline{E}(\underline{r}) = -j\Psi(r) \left\{ k_0 (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0\hat{r}) + \frac{k_0}{Z_0} \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0\hat{r}) \right\} \quad (2.188)$$

Infine, poiché $\frac{k_0}{Z_0} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{\sqrt{\mu/\epsilon}} = \omega\epsilon$ perveniamo all'espressione del campo magnetico

$$Y_0 \hat{r} \times \underline{E}(\underline{r}) = \Psi(r) \left\{ -j\omega\epsilon \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0\hat{r}) - jk_0 (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0\hat{r}) \right\} = \underline{H}(\underline{r}) \quad (2.189)$$

cioè

$$\underline{H}(\underline{r}) = \frac{1}{Z_0} \hat{r} \times \underline{E}(\underline{r}) \quad (2.190)$$

Passiamo adesso a considerare la descrizione degli aspetti energetici dell'irradiazione in campo lontano, e quindi consideriamo il vettore di Poynting complesso

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}^* = \left[-j\frac{Z_0}{2r\lambda_0} e^{-jk_0 r} \underline{P}_e(\hat{r}) \right] \times \left[-j\frac{Y_0}{2r\lambda_0} e^{-jk_0 r} \underline{P}_m(\hat{r}) \right]^* \quad (2.191)$$

cioè

$$\underline{S} = \frac{1}{4r^2\lambda_0^2} [\underline{P}_e(\hat{r}) \times \underline{P}_m^*(\hat{r})] \quad (2.192)$$

Dal momento che $\underline{P}_m(\hat{r}) = Z_0 \hat{r} \times \underline{P}_e(\hat{r})$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
 \underline{S} &= \frac{1}{4r^2 \lambda_0^2} Z_0 [\underline{P}_e(\hat{r}) \times \hat{r} \times \underline{P}_e^*(\hat{r})] = \\
 &= \frac{1}{4r^2 \lambda_0^2} Z_0 \{ [\underline{P}_e(\hat{r}) \cdot \underline{P}_e^*(\hat{r})] \hat{r} - [\underline{P}_e(\hat{r}) \cdot \hat{r}] \underline{P}_e^*(\hat{r}) \} = \\
 &= \frac{Z_0}{4r^2 \lambda_0^2} |\underline{P}_e(\hat{r})|^2 \hat{r}
 \end{aligned} \tag{2.193}$$

Al variare della direzione di osservazione si ha una variazione del flusso di energia che dipende dal quadrato del modulo del vettore di irradiazione $\underline{P}_e$.

2.5.6 Approssimazione locale del campo irradiato

Consideriamo adesso il campo irradiato da una sorgente, localizzata nell'origine del nostro sistema di riferimento, nella regione $\Delta\Sigma$ individuata dalla direzione $\hat{r}$ e descritta dall'angolo solido $\Delta\Omega$, come in Fig. 2.8. Abbiamo

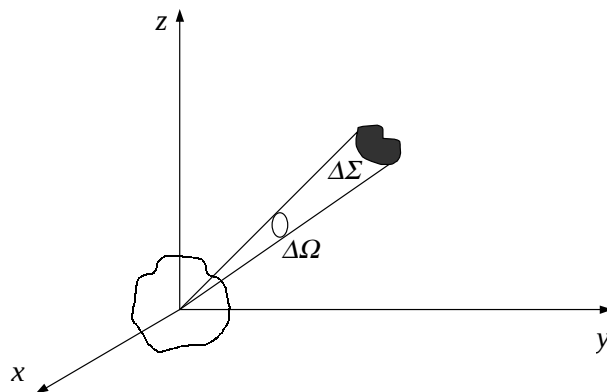


Figura 2.8. Campo irradiato nella regione $\Delta\Sigma$.

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\Sigma}{r^2} \ll 1 \tag{2.194}$$

È ragionevole supporre che il versore $\hat{r}$ sia uguale per tutti i punti della regione $\Delta\Sigma$. Questa assunzione permette di affermare che il termine $\underline{P}_e(\hat{r})$ è costante in tutta la regione $\Delta\Sigma$, ovvero che se anche il campo non è globalmente un'onda sferica, lo è localmente attorno ad una data direzione. Ma ciò può risultare addirittura restrittivo: se all'interno della regione $\Delta\Sigma$ si considera il disco definito da $\frac{1}{r} \simeq \text{cost}$, come in Fig. 2.9. allora il campo diventa approssimabile ad un'onda piana con vettore di propagazione $\underline{k} = k_0 \hat{r}$, valendo le relazioni d'impedenza e di trasversalità dei campi elettrico e magnetico, nonché la relazione di dispersione $|\underline{k}| = k_0$. Abbiamo già avuto occasione di precisare che le onde piane non sono fisicamente realizzabili singolarmente, tuttavia abbiamo anche appena scoperto che in una regione limitata dello spazio, se $\hat{r}$, $|\underline{P}_e(\hat{r})|$ e $\frac{1}{r}$ sono approssimativamente costanti, l'onda piana riesce da sola a descrivere il campo con una certa accuratezza, quando ci si trovi nella regione di Fraunhofer.

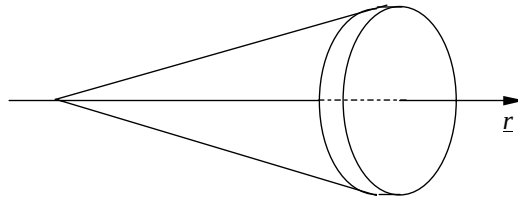


Figura 2.9. Disco $\frac{1}{r} \simeq \text{cost}$.

2.5.7 Diagramma di irradiazione e polarizzazione del campo

Avendo scomposto il campo irradiato in un termine di onda sferica ed uno dipendente solo dalla direzione di osservazione è lecito chiedersi quali siano le superfici ad ampiezza costante e come queste vengano influenzate dal termine direzionale $\underline{P}_e(\hat{r})$. Ponendo

$$|\underline{E}(\underline{r})| = \text{cost} \quad (2.195)$$

si perviene all'equazione

$$\frac{1}{r} |\underline{P}_e(\hat{r})| = \frac{1}{r} |\underline{P}_e(\theta, \phi)| = \text{cost} \quad (2.196)$$

e quindi le superfici ad ampiezza costante S_A sono individuate dall'equazione

$$S_A : r(\theta, \phi) = \text{cost} |\underline{P}_e(\hat{r})| \quad (2.197)$$

Risulta conveniente tracciare tali superfici in un sistema di coordinate sferiche, e i diagrammi così ottenuti sono detti *diagrammi di irradiazione* in forma polare. Essi danno le informazioni globali più evidenti e, per avere un'idea quantitativa, si effettuano dei tagli del tipo $\theta = \text{cost}$ e $\phi = \text{cost}$ sulle superfici $|\underline{P}_e(\theta, \phi)|^2$ o $|\underline{P}_e(\theta, \phi)|$. Si noti che, fissata la direzione di osservazione, cioè θ e ϕ , la dipendenza del campo dalla distanza è $|\underline{E}(\underline{r})| \propto \frac{1}{r}$, cioè il campo si comporta come un'onda sferica. Il diagramma di irradiazione di una antenna è in genere spazialmente illimitato. Questo è dovuto al fatto che l'espressione del campo è data dalla trasformata di Fourier (spaziale) della distribuzione di sorgente che usualmente è spazialmente confinata (e che non ha tutte le derivate continue al bordo), per cui quello che otteniamo è la trasformata convoluta con la trasformata di una porta che come noto ha un andamento oscillante. Il diagramma di irradiazione riferito a θ avrà quindi una forma come quella mostrata in Fig. 2.10. La regione angolare tra il massimo e il primo zero (o minimo) è detta *lobo principale*, mentre le altre sono dette *lobi secondari*.

Concludiamo il discorso sull'irradiazione in campo lontano richiamando il noto concetto di *polarizzazione* del campo elettromagnetico. La polarizzazione è la corrispondenza tra il fasore del campo e la sua rappresentazione istantanea nel dominio del tempo, e rappresenta pertanto una caratteristica puntuale del campo stesso. La polarizzazione si può studiare in generale, e non necessariamente per campi trasversali rispetto alla direzione di propagazione. Nel nostro caso è inoltre valida la relazione di impedenza ed è dunque indifferente se lo studio viene fatto a partire dal campo elettrico o magnetico. Generalmente si considera il campo elettrico, il cui fasore viene scomposto nelle sue componenti reale ed immaginaria

$$\underline{E} = \underline{E}' + j\underline{E}'' \quad (2.198)$$

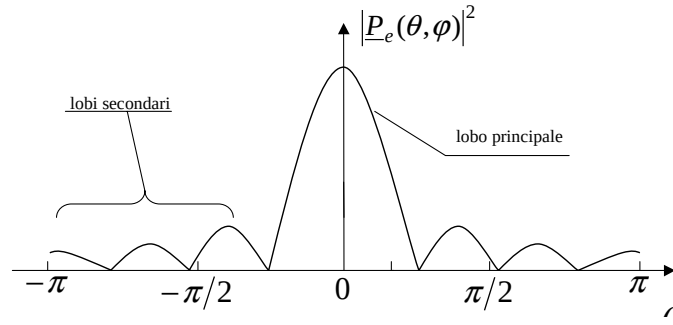


Figura 2.10. Esempio di diagramma di irradiazione.

Si noti che $\underline{E}'$, $\underline{E}''$ sono vettori reali. Si definisce per i campi trasversali un piano di polarizzazione che individua le possibili direzioni del vettore di campo. Essendo nel nostro caso

$$\underline{E} \cdot \hat{r} \simeq 0 ; \underline{H} \cdot \hat{r} \simeq 0 \quad (2.199)$$

è evidente che, puntualmente, $\underline{r}$ è la normale a tale piano ortogonale. In ogni punto i vettori $\underline{E}'$ ed $\underline{E}''$ identificano il piano di polarizzazione, tranne nel caso degenerare in cui $\underline{E}' \parallel \underline{E}''$ o $\underline{E}', \underline{E}'' = 0$; in tal caso è necessario conoscere anche $\underline{H}$. Nel dominio del tempo il campo elettrico è identificato dal vettore istantaneo

$$\underline{\mathcal{E}}(\underline{r}, t) = \text{Re} \left\{ \underline{E}(\underline{r}) e^{j\omega t} \right\} \quad (2.200)$$

che possiamo scrivere, dalla (2.198), come

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{E}}(t) &= \text{Re} \left\{ \underline{E}'(\underline{r}) + j\underline{E}''(\underline{r}) e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \underline{E}'(\underline{r}) \cos(\omega t) - \underline{E}''(\underline{r}) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (2.201)$$

Andando a vedere quanto vale tale vettore a veri istanti di tempo, per esempio ogni quarto di periodo, notiamo che

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{E}}(\underline{r}, t = 0) &= \underline{E}'(\underline{r}) \\ \underline{\mathcal{E}}(\underline{r}, t = T/4) &= -\underline{E}''(\underline{r}) \\ \underline{\mathcal{E}}(\underline{r}, t = T/2) &= -\underline{E}'(\underline{r}) \\ \underline{\mathcal{E}}(\underline{r}, t = 3T/4) &= \underline{E}''(\underline{r}) \end{aligned} \quad (2.202)$$

essendo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Si vede allora che l'estremità del vettore $\underline{\mathcal{E}}(\underline{r}, t)$ ruota nel piano individuato dai vettori $\underline{E}'$ e $\underline{E}''$ descrivendo in generale un'ellisse, detta *ellisse di polarizzazione*; possiamo quindi dire che la polarizzazione del campo è generalmente ellittica. Possono presentarsi due casi particolari:

- l'ellisse è una circonferenza: *polarizzazione circolare*;
- l'ellisse degenera in un segmento: *polarizzazione lineare*.

Definendo il *versore di polarizzazione*

$$\hat{p} \equiv \frac{\underline{E}}{|\underline{E}|} \quad (2.203)$$

è sufficiente studiare tale versore per conoscere lo stato di polarizzazione del campo.

1. Polarizzazione lineare:

$\underline{E}'$ è parallelo ad $\underline{E}''$, cioè $\underline{E}'' = C\underline{E}'$, oppure uno dei vettori $\underline{E}'$ o $\underline{E}''$ è nullo. In tal caso, indicando $\hat{p} = \frac{\underline{E}'}{|\underline{E}'|}$, $E = |\underline{E}|$ e $\phi = \arctan(\frac{E''}{E'})$ si ha

$$\underline{E} = (E' + jE'')\hat{p} = E e^{j\phi} \hat{p} \quad (2.204)$$

2. Polarizzazione circolare:

$$|\underline{E}'| = |\underline{E}''| \text{ ed } \underline{E}' \cdot \underline{E}'' = 0$$

3. Polarizzazione ellittica (in senso stretto):

Si ha in tutti gli altri casi; i *semidiametri coniugati* dell'ellisse di polarizzazione sono legati ai vettori $\underline{E}'$ ed $\underline{E}''$, ma in generale $\underline{E}'$ ed $\underline{E}''$ non coincidono con i semidiametri.

Il vettore di irradiazione $\underline{P}_e(\hat{r})$ contiene dunque tutte le caratteristiche del campo: $|\underline{P}_e(\hat{r})|$ descrive il diagramma di irradiazione e il versore $\frac{\underline{P}_e(\hat{r})}{|\underline{P}_e(\hat{r})|} = \hat{p}$ ad esso associato descrive completamente la polarizzazione del campo. La polarizzazione è una caratteristica importante che è legata all'intrinseca vettorialità del campo, per cui sono necessarie le informazioni su ampiezza e polarizzazione per averne una descrizione completa. Ad esempio la polarizzazione permette di raddoppiare la quantità di informazione in un canale di comunicazione, tramite la cosiddetta *diversificazione in polarizzazione*: usando due polarizzazioni ortogonali si possono trasmettere due segnali diversi alla stessa frequenza (vedi anche Cap. 8).

È bene notare che la polarizzazione dipende dalla direzione di osservazione: dalla relazione

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega\mu \frac{e^{-jk_0r}}{4\pi r} \underline{P}_e(\hat{r}) \quad (2.205)$$

abbiamo che il campo nel punto $\underline{r}_1$ sarà dato da $\underline{E}_1 = \underline{E}(\underline{r}_1) = \underline{E}'_1 + j\underline{E}''_1$ con polarizzazione $\hat{p}_1$, mentre il campo in $\underline{r}_2$ sarà identificato dal vettore $\underline{E}_2 = \underline{E}(\underline{r}_2) = \underline{E}'_2 + j\underline{E}''_2$, il cui versore $\hat{p}_2$ definirà una polarizzazione diversa dalla precedente. Tuttavia se si considera

$$\underline{r}_1 = r_1 \hat{r} ; \underline{r}_2 = r_2 \hat{r} \quad (2.206)$$

il campo sarà dato nei due punti da

$$\underline{E}(\underline{r}_1) = -j\omega\mu \frac{e^{-jk_0r_1}}{4\pi r_1} \underline{P}_e(\hat{r}) \quad (2.207)$$

$$\underline{E}(\underline{r}_2) = -j\omega\mu \frac{e^{-jk_0r_2}}{4\pi r_2} \underline{P}_e(\hat{r}) \quad (2.208)$$

La differenza tra i due campi è evidentemente nel solo termine di onda sferica, mentre il vettore di irradiazione $\underline{P}_e(\hat{r})$ sarà il medesimo per entrambe: la polarizzazione del campo risulta allora invariante per propagazione lungo una stessa direzione.

2.5.8 Riassunto dei risultati ottenuti nei paragrafi 2.5

Con riferimento alla Fig. 2.5 l'espressione esatta del campo elettrico irradiato dalla sorgente Ω ed osservato nel punto $\underline{r}$ è data da

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega\mu \int_{\Omega} d^3\underline{r}' \underline{G}(\underline{r} - \underline{r}') \cdot \underline{J}_e(\underline{r}') - \int_{\Omega} d^3\underline{r}' \underline{G}'(\underline{r} - \underline{r}') \cdot \underline{J}_m(\underline{r}') \quad (2.209)$$

in cui essendo $d \gg \lambda$ (che implica $\underline{G}(\underline{d}) \simeq \underline{I}_{td} \Psi(d)$ e $\underline{G}'(\underline{d}) \simeq -jk_0 \hat{d} \times \underline{I} \Psi(d)$) il primo integrale della 2.209 risulta:

$$\underline{I} = \int_{\Omega} d^3\underline{r}' \underline{G}(\underline{d}) \cdot \underline{J}_e(\underline{r}') \simeq \int_{\Omega} d^3\underline{r}' \underline{I}_{td} \cdot \underline{J}_e(\underline{r}') \frac{e^{-jk_0 d}}{4\pi d} \quad (2.210)$$

dove $\underline{I}_{td} = \hat{\theta}_d \hat{\theta}_d + \hat{\phi}_d \hat{\phi}_d$. Utilizzando l'approssimazione $d = r$ si ottiene un errore di fase che non dipende dalla distanza e quindi non si può introdurre una limitazione per questo termine. Sfruttando invece l'approssimazione:

$$d \simeq r - \hat{r} \cdot \underline{r}' \quad (2.211)$$

si ottiene che per avere un errore di fase $\Delta\Phi \leq \frac{\pi}{8}$ (convenzionale) si deve avere $r > r_{min} = \frac{2h^2}{\lambda_0}$ detta regione di Fraunhofer. In tale regione le formulazioni del campo elettrico e del campo magnetico risultano:

$$\underline{E}(\underline{r}) \simeq -j\omega\mu \Psi(r) \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \int_{\Omega} d^3\underline{r}' e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \underline{J}_e(\underline{r}') + jk_0 \hat{r} \times \underline{I} \Psi(r) \cdot \int_{\Omega} d^3\underline{r}' e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \underline{J}_m(\underline{r}') \quad (2.212)$$

$$\underline{H}(\underline{r}) \simeq -j\omega\epsilon \Psi(r) \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \int_{\Omega} d^3\underline{r}' e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \underline{J}_m(\underline{r}') - jk_0 \hat{r} \times \underline{I} \Psi(r) \cdot \int_{\Omega} d^3\underline{r}' e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (2.213)$$

che possono essere riscritte come :

$$\underline{E}(\underline{r}) \simeq -j\omega\mu \underline{G}_a(\underline{r}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) - \underline{G}'_a(\underline{r}) \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) \quad (2.214)$$

$$\underline{H}(\underline{r}) \simeq -j\omega\epsilon \underline{G}_a(\underline{r}) \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) + \underline{G}'_a(\underline{r}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) \quad (2.215)$$

dove

$$\underline{G}_a(\underline{r}) \equiv \Psi(r) \underline{I}_{t\hat{r}} ; \underline{G}'_a(\underline{r}) \equiv -jk_0 \hat{r} \times \underline{I} \Psi(r) \quad (2.216)$$

Per i termini di sorgente si ha:

$$\tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{r}' e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \underline{J}_e(\underline{r}') \simeq \int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{r}' \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (2.217)$$

$$\tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{r}' e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \underline{J}_m(\underline{r}') \simeq \int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{r}' \underline{J}_m(\underline{r}') \quad (2.218)$$

Poichè i termini $\tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r})$ e $\tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r})$ dipendono evidentemente dalla direzione di osservazione (cioè da $\hat{r}$) si ricava la proprietà di direttività: l'intensità del campo irradiato a distanza fissa dalla sorgente può essere marcatamente diversa da una direzione all'altra. Volendo isolare nell'espressione del campo elettromagnetico il termine dipendente dalla direzione si ottiene:

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j \frac{Z_0}{2r \lambda_0} e^{-jk_0 r} \underline{P}_e(\hat{r}) \quad (2.219)$$

$$\underline{H}(\underline{r}) = -j \frac{Y_0}{2r\lambda_0} e^{-jk_0 r} \underline{P}_m(\hat{r}) \quad (2.220)$$

avendo posto

$$\underline{P}_e(\hat{r}) = \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) - \frac{1}{Z_0} (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) \quad (2.221)$$

$$\underline{P}_m(\hat{r}) = \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) + Z_0 \hat{r} \times \underline{I} \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) \quad (2.222)$$

I vettori $\underline{P}_e$ e $\underline{P}_m$ sono i vettori di irradiazione o vettori di Schelkunoff e sono legati tra loro dalla relazione:

$$\underline{P}_m(\hat{r}) = Z_0 \hat{r} \times \underline{P}_e(\hat{r}) \quad (2.223)$$

Poichè si è dimostrato che vale la relazione di impedenza:

$$\underline{H}(\underline{r}) = \frac{1}{Z_0} \hat{r} \times \underline{E}(\underline{r}) \quad (2.224)$$

il vettore di Poynting complesso può essere scritto come:

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{Z_0}{4r^2\lambda_0^2} |\underline{P}_e(\hat{r})|^2 \hat{r} \quad (2.225)$$

Infine considerando una superficie piana per cui $\frac{1}{r} \simeq \text{cost}$ il campo può essere approssimato con un'onda piana con vettore di propagazione $\underline{k} = k_0 \hat{r}$, valendo le relazioni d'impedenza e di trasversalità dei campi elettrico e magnetico, nonché la relazione di dispersione $|\underline{k}| = k_0$.

2.6 Irradiazione di un dipolo elettrico elementare e relative questioni energetiche

Nella sua forma tipica, il *dipolo elettrico elementare*, consta di due conduttori elettrici, racchiusi in un volume Ω avente dimensione caratteristica $\Delta l \ll \lambda_0$, sui quali viene forzata una corrente (tempo-variante). Un esempio tipico, che è stato uno dei primi oggetti adoperati come antenne, è costituito da una coppia di barre conduttrici poste ad una distanza $\delta \ll \lambda_0$ l'una dall'altra, e un'altra configurazione è quella che usò Hertz (vedi Fig. 2.11). Nel paragrafo 2.5.3 abbiamo visto che il campo, elettrico e magnetico, prodotto da un dipolo elettrico elementare è funzione del vettore *momento elettrico* di dipolo definito dalla (2.168) (essendo nulle le correnti magnetiche). Vediamo ora l'espressione del campo vicino e del campo lontano per questo tipo di antenna.

2.6.1 Campo vicino per un dipolo elementare

La condizione che determina la situazione di campo vicino è data, come è già stato detto, da $r \ll \lambda_0$ cioè $k_0 r \ll 1$ e quindi da $\frac{1}{k_0 r} \gg 1$.

Iniziamo con l'approssimazione del campo elettrico, notando che

$$A(k_0 r) = 2 \left(\frac{j}{k_0 r} + \frac{1}{(k_0 r)^2} \right) \simeq \frac{2}{(k_0 r)^2} \quad (2.226)$$

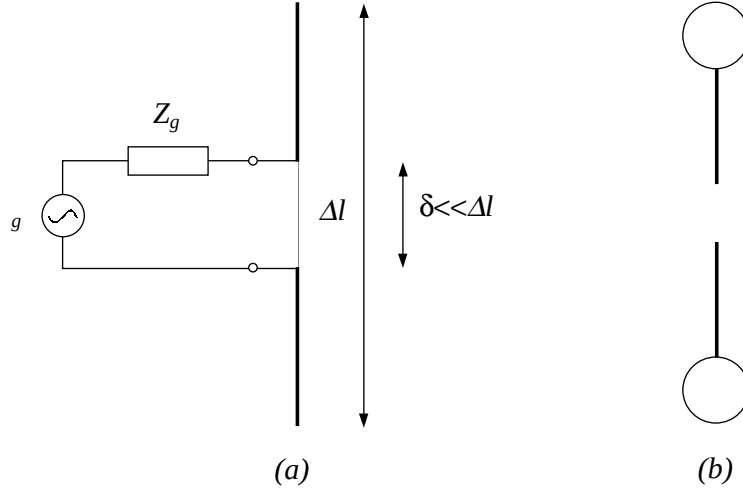


Figura 2.11. Due configurazioni possibili di dipolo elementare: (a) coppia di barre conduttrici; (b) dipolo hertziano.

$$B(k_0 r) = 1 - \frac{A(k_0 r)}{2} \simeq -\frac{1}{(k_0 r)^2} \quad (2.227)$$

Da ciò si ottiene

$$\underline{\underline{G}}(\underline{r}) \simeq \underline{\underline{G}}_{NF}(\underline{r}) = \left[\frac{2}{(k_0 r)^2} \hat{r} \hat{r} - \frac{1}{(k_0 r)^2} (\hat{\theta} \hat{\theta} + \hat{\phi} \hat{\phi}) \right] \frac{1}{4\pi r} \quad (2.228)$$

dove il pedice NF sta per *near field* (campo vicino) e in cui l'esponenziale è approssimato con 1, date le ipotesi. Siccome abbiamo visto che

$$\underline{E}(\underline{r}) \simeq -j\omega\mu \underline{\underline{G}}(\underline{r}) \cdot \underline{M}_e \quad (2.229)$$

supponendo che il dipolo sia centrato, e ponendo $\underline{M}_e = \hat{u} M$ possiamo scrivere

$$\underline{E}(\underline{r}) \simeq -j\omega\mu \frac{1}{(k_0 r)^2} \left\{ 2\hat{r} (\hat{r} \cdot \hat{u}) - \hat{\theta} (\hat{\theta} \cdot \hat{u}) - \hat{\phi} (\hat{\phi} \cdot \hat{u}) \right\} \frac{1}{4\pi r} M \quad (2.230)$$

Dal momento che $(k_0 r)^2 = \omega^2 \epsilon \mu r^2$ si ha

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{-j}{\omega\epsilon} \frac{M}{4\pi r^3} \underline{e}(\hat{r}) = \frac{1}{j\omega} \frac{M}{4\pi \epsilon r^3} \underline{e}(\hat{r}) \quad (2.231)$$

dove

$$\underline{e}(\hat{r}) = \left\{ 2\hat{r} (\hat{r} \cdot \hat{u}) - \hat{\theta} (\hat{\theta} \cdot \hat{u}) - \hat{\phi} (\hat{\phi} \cdot \hat{u}) \right\} \quad (2.232)$$

Il fatto che si possa introdurre il termine $\underline{e}(\hat{r})$, dipendente unicamente dalla direzione individuata dal versore $\hat{r}$ e non dalla distanza r cioè solo da (θ, ϕ) , è una conseguenza del fatto che in un sistema di riferimento sferico le direzioni $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ sono univocamente determinate a partire dalla conoscenza della direzione $\hat{r}$. Ad esempio se $\hat{u} = \hat{z}$ si ha: $\hat{r} \cdot \hat{u} = \hat{r} \cdot \hat{z} = \cos \theta$, $\hat{\theta} \cdot \hat{u} = \hat{\theta} \cdot \hat{z} = -\sin \theta$, $\hat{\phi} \cdot \hat{u} = \hat{\phi} \cdot \hat{z} = 0$. Si può allora scrivere

$$\underline{E}(r, \theta, \phi) = a(r, \omega) \underline{e}(\theta, \phi) = a(r, \omega) \underline{e}(\hat{r}), \quad a(r, \omega) = \frac{1}{j\omega} \frac{M}{4\pi 2r^3} \quad (2.233)$$

dove il termine di ampiezza $a(r, \omega)$ contiene il termine $\frac{M}{j\omega}$ che è il solo che dipende dalla frequenza. Per un filo rettilineo percorso da corrente si ha

$$\frac{M}{j\omega} = \frac{1}{j\omega} \int_0^{\Delta l} dz I(z, \omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \int_{-\infty}^t dt' \int_0^{\Delta l} dz i(t', z) \quad (2.234)$$

Si vede quindi che il campo elettrico in campo vicino è strettamente legato alla variazione di carica elettrica.

Per il campo magnetico il discorso è analogo. Abbiamo

$$\underline{\underline{G}}'(\underline{r}) \simeq \underline{\underline{G}}'_{NF}(\underline{r}) = -jk_0 \left\{ -j \frac{1}{k_0 r} (\hat{\phi} \hat{\theta} - \hat{\theta} \hat{\phi}) \right\} \frac{1}{4\pi r} \quad (2.235)$$

perché $C(k_0 r) \simeq -j \frac{1}{k_0 r}$. Siccome poi

$$\underline{H}(\underline{r}) \simeq \underline{\underline{G}}'(\underline{r}) \cdot \underline{M}_e \quad (2.236)$$

supponendo sempre che il dipolo sia centrato, otteniamo

$$\underline{H}(\underline{r}) \simeq -\frac{M}{4\pi r^2} \underline{h}(\hat{r}), \quad \underline{h}(\hat{r}) = \{\hat{\phi}(\hat{\theta} \cdot \hat{u}) - \hat{\theta}(\hat{\phi} \cdot \hat{u})\} \quad (2.237)$$

in stretta analogia a quanto ottenuto per il campo elettrico. Va notato, però, che il campo elettrico decresce con il cubo della distanza, mentre il campo magnetico come il quadrato.

2.6.2 Campo lontano per un dipolo elementare

In campo lontano si ha $r \gg \lambda_0$ e dunque $\frac{1}{k_0 r} \ll 1$.

Abbiamo allora per il campo elettrico

$$A(k_0 r) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k_0 r}\right); \quad B(k_0 r) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k_0 r}\right) \quad (2.238)$$

Possiamo allora scrivere

$$\underline{\underline{G}}(\underline{r}) \simeq \underline{\underline{G}}_a(\underline{r}) = (\hat{\theta} \hat{\theta} + \hat{\phi} \hat{\phi}) \Psi(r) \quad (2.239)$$

dove il pedice a sta per *asintotico*. In un sistema di riferimento sferico la diade

$$\underline{\underline{I}} - \hat{r} \hat{r} = \hat{\theta} \hat{\theta} + \hat{\phi} \hat{\phi} = \underline{\underline{I}}_{t\hat{r}} \quad (2.240)$$

è tale che $\underline{\underline{I}}_{t\hat{r}} \cdot \underline{A} = \underline{A} - \hat{r}(\hat{r} \cdot \underline{A}) = A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$, e cioè essa elimina la componente radiale di ogni vettore cui è applicata lasciando inalterato il resto, perciò si chiama diade trasversa alla direzione $\hat{r}$ (vedi appendice B). Scriviamo allora

$$\underline{E}(r) \simeq -j\omega\mu \underline{\underline{I}}_{t\hat{r}} \cdot \underline{M}_e \Psi(r) \quad (2.241)$$

Per il campo magnetico abbiamo

$$C(k_0 r) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k_0 r}\right) \quad (2.242)$$

e quindi

$$\underline{\underline{G}}'(r) \simeq \underline{\underline{G}}'_a(r) = -jk_0 \hat{r} \times \underline{\underline{I}} \Psi(r) \quad (2.243)$$

Il campo magnetico si approssima allora nel modo seguente:

$$\underline{\underline{H}}(r) = -jk_0 \hat{r} \times \underline{\underline{M}}_e \Psi(r) \quad (2.244)$$

Dalla forma della funzione di Helmholtz possiamo dedurre che il campo elettrico e il campo magnetico sono in modulo decrescenti come $\frac{1}{r}$ quando ci si allontana dalla sorgente, cioè hanno un andamento simile, a differenza di quanto accade in campo vicino. Inoltre, siccome $\hat{r} \times \hat{r} = 0$ abbiamo

$$\hat{r} \times \underline{\underline{M}}_e = \hat{r} \times \underline{\underline{I}}_{t\hat{r}} \cdot \underline{\underline{M}}_e \quad (2.245)$$

Allora otteniamo

$$\underline{\underline{H}}(r) \simeq -jk_0 \hat{r} \times \underline{\underline{I}}_{t\hat{r}} \cdot \underline{\underline{M}}_e \Psi(r) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{r} \times \underline{\underline{E}}(r) \quad (2.246)$$

visto che

$$\frac{1}{-j\omega\mu} \underline{\underline{E}}(r) \simeq \underline{\underline{I}}_{t\hat{r}} \cdot \underline{\underline{M}}_e \Psi(r) \Rightarrow \underline{\underline{H}}(r) \simeq -jk_0 \hat{r} \times \left[\frac{1}{-j\omega\mu} \underline{\underline{E}}(r) \right] \quad (2.247)$$

Introducendo l'*impedenza intrinseca del vuoto*

$$Z_0 \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2.248)$$

possiamo scrivere

$$\underline{\underline{H}}(r) \simeq \frac{1}{Z_0} \hat{r} \times \underline{\underline{E}}(r) \quad (2.249)$$

(si tratta di una relazione già nota dallo studio delle onde piane); ne concludiamo che in campo lontano il campo elettrico e il campo magnetico soddisfano ad una *relazione di impedenza*, e l'impedenza intrinseca del rappresenta il rapporto fra il modulo del campo elettrico e il modulo del campo magnetico (se il mezzo considerato è il vuoto)

$$Z_0 \simeq \frac{|\underline{\underline{E}}|}{|\underline{\underline{H}}|} \quad (2.250)$$

Possiamo ancora notare che

$$\hat{r} \cdot \underline{\underline{E}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(k_0 r)^2}\right) ; \hat{r} \cdot \underline{\underline{H}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(k_0 r)^2}\right) \quad (2.251)$$

e quindi la (2.249), la forma del termine di fase e di ampiezza ci fanno desumere che nelle condizioni di campo lontano il campo elettromagnetico tende ad assumere la forma di onda piana avente vettore di propagazione dato da $\underline{\underline{k}} = k_0 \hat{r}$, con $\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{k}}(\hat{r})$. Dato che $\underline{\underline{k}} \neq \text{cost.}$ questa non è una vera onda piana, nel senso che solo localmente (cioè $\hat{r} \approx \text{cost.}$) si comporta come tale. Il fattore di fase $e^{-jk_0 r}$ si può pensare come $k_0 r = \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{r}}$ con $\underline{\underline{k}} = k_0 \hat{r}$, ed il termine di

ampiezza $\frac{1}{k_0 r}$ è circa costante in un volume attorno ad $\underline{r}$ di dimensione caratteristica $\Delta r \ll r$. Inoltre il vettore di Poynting è dato da

$$\begin{aligned} \underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}^* &= \underline{E} \times \left(\frac{1}{Z_0} \hat{r} \times \underline{E}^* \right) = \\ &= \frac{1}{Z_0} [(\underline{E} \cdot \underline{E}^*) \hat{r} - (\hat{r} \cdot \underline{E}) \underline{E}^*] \simeq \hat{r} |\underline{E}|^2 \frac{1}{Z_0} \end{aligned} \quad (2.252)$$

in quanto $\hat{r} \cdot \underline{E} \simeq 0$ perché $\underline{E} = \underline{I}_{\hat{r}} \cdot \underline{M}_e \Psi(r)$ e $Z_0 \in \mathbf{R}$ nel vuoto e in tutti i mezzi senza perdite. Tutto ciò ci porta a concludere che $\hat{r}$ può essere interpretata come la *direzione di propagazione* dell'onda, in quanto è la direzione del flusso energetico, la direzione lungo cui decresce la fase dei campi elettrico e magnetico, la direzione fissata la quale il campo decresce in ampiezza come $\frac{1}{r}$ all'aumentare della distanza r dalle sorgenti ed è infine un versore trasversale al campo.

Se localmente è un'onda piana, di che tipo di onda si tratta globalmente? Ponendo $\underline{M}_e = \hat{u} M$ si può scrivere $\underline{E}(r) = -j\omega\mu (\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}) \cdot \hat{u} M \Psi(r)$. Senza perdere in generalità, se si orienta l'asse polare lungo l'asse del dipolo, cioè $\hat{u} = \hat{z}$, si ottiene $\hat{\theta}(\hat{\theta} \cdot \hat{z}) + \hat{\phi}(\hat{\phi} \cdot \hat{z}) = (-\sin\theta)\hat{\theta}$, e quindi (Fig. 2.12)

$$\underline{E}(r, \theta, \phi) \simeq -j\omega\mu M \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} (-\sin\theta) \hat{\theta} \quad (2.253)$$

Il fattore $\sin\theta$ prende il nome di *fattore di obliquità* e la sua presenza fa sì che in alcune direzioni, a parità di distanza r , il campo sia più intenso che in altre, e che le superfici ad ampiezza costante del campo non siano sferiche. Il campo dunque non è globalmente un'onda sferica, perché le superfici ad ampiezza costante sono invece date da

$$|\underline{E}| = \text{cost} \Rightarrow \frac{|\sin\theta|}{r} = \text{cost} \Rightarrow r = r(\theta) = \text{cost} |\sin\theta| \quad \forall \phi \quad (2.254)$$

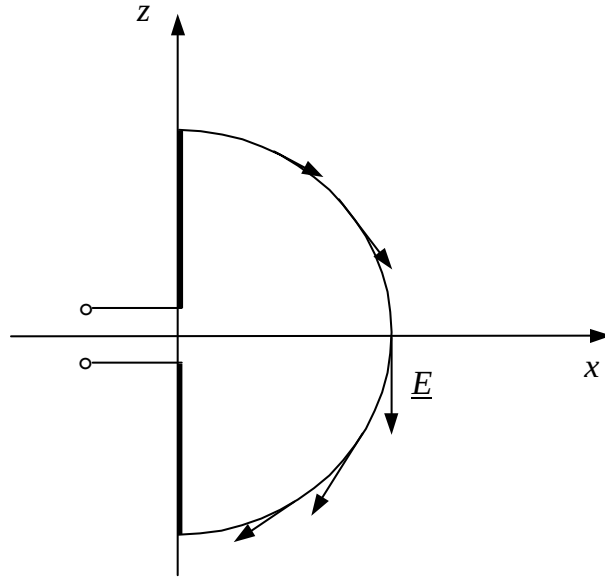
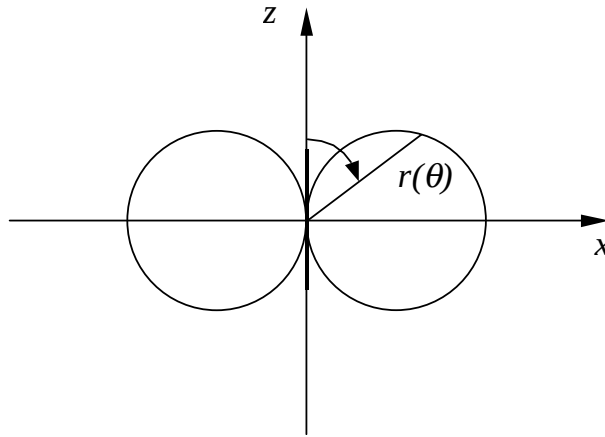


Figura 2.12. Campo elettrico per il dipolo, fissato r .

che rappresenta un toro degenero, cioè la superficie ottenuta per rotazione intorno all'asse z del cerchio di Fig. 2.13, giacente sul piano (x, z) (per fissare le idee).

Figura 2.13. Taglio sul piano (x, z) del toro degenere.

2.6.3 Considerazioni energetiche

Eseguendo il prodotto esterno nel vettore di Poynting $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}^*$ si può facilmente vedere, dalle (2.231) e (2.237), che in campo vicino esso è puramente immaginario, e sembrerebbe quindi che al campo non sia associato alcun trasporto di potenza attiva. D'altro canto, abbiamo già visto che in campo lontano il vettore di Poynting è dato da

$$\underline{S} \simeq \hat{r} |\underline{E}|^2 \frac{1}{Z_0} \quad (2.255)$$

e quindi è puramente reale, ovvero in campo lontano si verifica un trasporto di potenza attiva associato al campo elettromagnetico. Dunque l'assenza di trasporto energetico riscontrata in campo vicino è evidentemente un effetto delle approssimazioni fatte; lì $\text{Im}(\underline{S}) \gg \text{Re}(\underline{S})$, e la parte reale è associata alla componente di campo che abbiamo trascurato perché piccola.

Vediamo dunque il calcolo completo. In generale la potenza complessa si può scrivere nella forma

$$\tilde{P} = P_{irr} + jQ \quad (2.256)$$

dove P_{irr} è la potenza attiva netta irradiata dal dipolo e Q è la potenza reattiva. Supponiamo che il dipolo abbia momento elettrico $\underline{M}_e = M\hat{z}$ e che sia centrato nell'origine $\underline{0}$ del nostro sistema di riferimento, il che non è restrittivo. Allora

$$\left. \frac{d\tilde{P}}{d\Sigma} \right|_{\hat{n}} = \frac{1}{2} \hat{n} \cdot \underline{S} ; \quad \left. \frac{dP_{irr}}{d\Sigma} \right|_{\hat{n}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\hat{n} \cdot \underline{S}) \quad (2.257)$$

dove $\hat{n}$ è il versore normale uscente dalla superficie Σ che si considera. Per una superficie sferica centrata in $\underline{0}$ si ha $\hat{n} = \hat{r}$, e

$$\left. \frac{d\tilde{P}}{d\Sigma} \right|_{\hat{r}} = \frac{1}{2} \hat{r} \cdot \underline{S} \Rightarrow 2\tilde{P} = \int_{\Sigma} d\Sigma \hat{r} \cdot \underline{S} = \int_{\Sigma} d\Sigma \hat{r} \cdot \underline{E} \times \underline{H}^* \quad (2.258)$$

Determiniamo allora l'espressione di $\underline{E}$.

$$\begin{aligned}
 \underline{E}(r) &= -j\omega\mu \underline{\underline{G}}(\underline{r}) \cdot \underline{M}_e = \\
 &= -j\omega\mu \left[A(k_0 r) \hat{r}\hat{r} + B(k_0 r) (\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}) \right] \cdot \hat{z} M \Psi(r) = \\
 &= -j\omega\mu \left[A(k_0 r) \hat{r} (\hat{r} \cdot \hat{z}) + B(k_0 r) (\hat{\theta} (\hat{\theta} \cdot \hat{z}) + \hat{\phi} (\hat{\phi} \cdot \hat{z})) \right] M \Psi(r) = \\
 &= -j\omega\mu \left[A(k_0 r) \hat{r} \cos \theta - B(k_0 r) \hat{\theta} \sin \theta \right] M \Psi(r)
 \end{aligned} \tag{2.259}$$

perché

$$\hat{r} \cdot \hat{z} = \cos \theta \quad ; \quad \hat{\theta} \cdot \hat{z} = -\sin \theta \quad ; \quad \hat{\phi} \cdot \hat{z} = 0 \tag{2.260}$$

Determiniamo ora l'espressione di $\underline{H}$.

$$\underline{H} = \underline{\underline{G}}' \cdot \underline{M}_e = -jk_0 \hat{r} C(k_0 r) \times M \hat{z} \Psi(r) \tag{2.261}$$

e quindi, essendo $\hat{r} \times \hat{z} = -\hat{\phi} \sin \theta$, si ottiene

$$\begin{aligned}
 \hat{r} \cdot \underline{S} &= \hat{r} \cdot \underline{E} \times \underline{H}^* = \hat{r} \cdot \left[(E_\theta \hat{\theta} + E_r \hat{r}) \times H_\phi^* \hat{\phi} \right] = E_\theta H_\phi^* = \\
 &= j\omega\mu \sin \theta M \Psi B (jk_0 C \sin \theta M \Psi)^* \\
 &= \omega\mu k_0 \sin^2 \theta |M|^2 |\Psi|^2 B C^*
 \end{aligned} \tag{2.262}$$

Siccome $|\Psi|^2 = \frac{1}{(4\pi)^2 r^2}$ si ottiene ancora

$$\hat{r} \cdot \underline{S} = \omega\mu k_0 \sin^2 \theta |M|^2 \frac{1}{(4\pi)^2 r^2} B C^* \tag{2.263}$$

Per quanto riguarda la potenza scriviamo allora

$$\begin{aligned}
 2\tilde{P} &= \int_{\Sigma} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \omega\mu k_0 \sin^2 \theta |M|^2 \frac{1}{(4\pi)^2 r^2} B C^* = \\
 &= \omega\mu k_0 |M|^2 \frac{B C^*}{(4\pi)^2} \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \int_0^{2\pi} d\phi = \\
 &= \omega\mu k_0 |M|^2 \frac{2\pi}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} B C^*
 \end{aligned} \tag{2.264}$$

dove

$$\int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \frac{4}{3} \tag{2.265}$$

Essendo

$$B(k_0 r) = 1 - \frac{j}{k_0 r} - \frac{1}{(k_0 r)^2} ; \quad C(k_0 r) = 1 - \frac{j}{k_0 r} \tag{2.266}$$

Si ha dunque

$$B C^* = \left(1 - \frac{j}{k_0 r} - \frac{1}{(k_0 r)^2} \right) \left(1 + \frac{j}{k_0 r} \right) = 1 - \frac{j}{(k_0 r)^3} \tag{2.267}$$

e quindi

$$\tilde{P} = \frac{1}{2} \omega\mu k_0 |M|^2 \frac{1}{6\pi} \left[1 - \frac{j}{(k_0 r)^3} \right] \tag{2.268}$$

Si può verificare che dimensionalmente la $\tilde{P}$ è una potenza. Infatti $[\omega\mu] = \Omega \text{ m}^{-1}$, $[k_0] = \text{m}^{-1}$ e $[|M|^2] = \text{A}^2 \text{ m}^2$, e dunque $[\tilde{P}] = \text{V A}$. Inoltre

$$\frac{\omega\mu}{k_0} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_0 \Rightarrow \omega\mu k_0 = Z_0 k_0^2 = Z_0 \frac{(2\pi)^2}{\lambda_0^2} \quad (2.269)$$

La potenza complessa può allora essere scritta come

$$\tilde{P} = \frac{1}{2} Z_0 \frac{|M|^2}{\lambda_0^2} \frac{(2\pi)^2}{6\pi} \left[1 - \frac{j}{(k_0 r)^3} \right] = \frac{1}{2} Z_0 \frac{|M|^2}{\lambda_0^2} \frac{2\pi}{3} \left[1 - \frac{j}{(k_0 r)^3} \right] \quad (2.270)$$

e concludiamo così che

$$\begin{cases} P_{irr} = \text{Re}\{\tilde{P}\} = \frac{1}{2} Z_0 \frac{|M|^2}{\lambda_0^2} \frac{2\pi}{3} \quad \forall r \\ Q = \text{Im}\{\tilde{P}\} = -\frac{1}{2} Z_0 \frac{|M|^2}{\lambda_0^2} \frac{2\pi}{3} \frac{1}{(k_0 r)^3} \end{cases} \quad (2.271)$$

Notiamo che la potenza reattiva decade come $\frac{1}{r^3}$ se ci allontaniamo dalla sorgente (decadenza molto rapida), mentre la potenza attiva irradiata non dipende dalla distanza cui ci troviamo dalla sorgente, come deve essere visto che il mezzo è senza perdite. La regione di campo vicino è la regione in cui si concentra l'energia reattiva, e quello che accade nelle vicinanze di un'antenna è analogo a quello che accade nelle vicinanze di un induttore o un condensatore. Si noti che, mentre la potenza irradiata non dipende da r , la densità di potenza invece non è costante e diminuisce come $\frac{1}{r^2}$ all'aumentare di r : ciò non è legato assolutamente alle perdite (che sono assenti), bensì al fatto che una potenza costante deve distribuirsi su una superficie sferica di raggio sempre maggiore.

Benché derivate per un dipolo elementare, le considerazioni svolte sopra risultano di validità generale.

3

L'antenna in trasmissione

3.1 Parametri fondamentali delle antenne

Per descrivere completamente un'antenna è necessario introdurre alcune definizioni e vari parametri. In generale non tutti i parametri sono scorrelati e sovente non è necessario specificarli tutti per una completa descrizione delle prestazioni di un'antenna, qui introdurremo solo i parametri più significativi ¹.

3.2 Caratterizzazione di un'antenna verso lo spazio libero

Abbiamo detto che un'antenna è l'interfaccia tra una parte circuitale e lo spazio libero: quindi essa va caratterizzata relativamente a questi due sistemi. Dobbiamo cioè considerare le sue caratteristiche sia verso il circuito di alimentazione, rispettivamente nel caso della trasmissione e della ricezione, sia verso lo spazio libero. In questo paragrafo vogliamo caratterizzare un'antenna verso lo spazio libero, basandoci sulle proprietà del campo irradiato, ed in particolare rispetto all'energia (scalare) e alla polarizzazione (vettoriale).

3.2.1 Direttività e guadagno

Si definisce *direttività* di un'antenna la grandezza:

$$d(\hat{r}) \equiv \frac{dP_{irr}/d\Sigma}{(dP_{irr}/d\Sigma)_{rif}} \quad (3.1)$$

cioè il rapporto tra la densità di potenza irradiata dall'antenna nella direzione $\hat{r}$ e quella irradiata da una sorgente di riferimento. La sorgente di riferimento che noi consideriamo è il *radiatore isotropico*, il quale produce un'onda sferica pura omnidirezionale, cioè irradia una densità di potenza data da

$$\left(\frac{dP_{irr}}{d\Sigma} \right)_{rif} = \frac{P_{irr}}{4\pi r^2} \quad (3.2)$$

¹Per una trattazione completa consultare C. Balanis "Antenna Theory", John Wiley and Sons, 1997, pp. 28 - 112 ed i riferimenti bibliografici ivi indicati.

Possiamo quindi scrivere

$$d(\hat{r}) = \frac{dP_{irr}/d\Sigma}{P_{irr}/4\pi r^2} \quad (3.3)$$

ovvero, essendo $d\Sigma = r^2 d\Omega$

$$d(\hat{r}) = \frac{dP_{irr}/d\Omega}{P_{irr}/4\pi} \quad (3.4)$$

Quando non specificato altro, questa è la definizione universalmente usata; in alcuni casi si usa come riferimento un'antenna particolarmente semplice, cioè il dipolo (vedi oltre).

Si consideri ora la *potenza di alimentazione* P_{al} dell'antenna, cioè la potenza erogata all'antenna dal circuito che la alimenta. Una parte P_{irr} di questa potenza viene effettivamente irradiata dall'antenna sotto forma di energia elettromagnetica, mentre la restante, P_{calore} , si trasforma in calore per effetto Joule connesso con le perdite ohmiche nella struttura materiale dell'antenna

$$P_{al} = P_{irr} + P_{calore} \quad (3.5)$$

e $P_{al} \geq P_{irr}$ (varrebbe l'uguaglianza nel caso ideale in cui non ci fossero perdite). Si definisce poi *rendimento ohmico* η di un'antenna il rapporto

$$\eta \equiv \frac{P_{irr}}{P_{al}} \leq 1 \quad (3.6)$$

Alle frequenze VHF e UHF, alle quali le antenne vengono realizzate con dei conduttori in cui fluisce corrente, le perdite non sono sempre trascurabili. A frequenze più alte, invece, le antenne sono tipicamente realizzate sfruttando delle guide d'onda, con rendimenti quasi unitari.

Un altro parametro globale che possiamo definire è il *guadagno* di un'antenna, dato da

$$g(\hat{r}) \equiv \frac{dP_{irr}/d\Sigma}{P_{al}/4\pi r^2} \quad (3.7)$$

ed, essendo $P_{al} = \frac{1}{\eta} P_{irr}$, possiamo anche scrivere

$$g(\hat{r}) = \eta \frac{dP_{irr}/d\Sigma}{P_{irr}/4\pi r^2} = \eta d(\hat{r}) \quad (3.8)$$

Il guadagno e la direttività sono chiaramente funzioni della direzione di osservazione. Dal punto di vista pratico, sono utili i loro valori massimi, cioè la *direttività massima* e il *guadagno massimo*, dati rispettivamente da

$$G \equiv \max_{\hat{r}} g(\hat{r}) ; \quad D \equiv \max_{\hat{r}} d(\hat{r}) \quad (3.9)$$

Quando non viene specificato altro, per “guadagno” di un'antenna si intende quello massimo. Inoltre è noto che la densità di potenza irradiata è legata al vettore di Poynting dalla relazione

$$\frac{dP_{irr}}{d\Sigma} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{S} \cdot \hat{r} \} \quad (3.10)$$

Sfruttando la relazione d'impedenza valida per il campo in regione di campo lontano si ha

$$\underline{H} = \frac{1}{Z_0} \hat{r} \times \underline{E} \Rightarrow \underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}^* = \hat{r} \frac{|\underline{E}|^2}{Z_0} = \hat{r} Z_0 |\underline{H}|^2 \quad (3.11)$$

e dunque si può scrivere

$$\frac{dP_{irr}}{d\Sigma} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{S} \cdot \hat{r} \} = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_0} |\underline{E}|^2 = \frac{1}{2} Z_0 |\underline{H}|^2 \quad (3.12)$$

Dalle (3.7) e (3.12) si vede che $g(\hat{r}) \propto |\underline{E}|^2$, ed essendo il campo elettrico in campo lontano proporzionale al vettore di irradiazione $\underline{P}_e$ (vedi (2.177)) abbiamo che $g(\hat{r}) \propto |\underline{P}_e|^2$. Concludiamo quindi che il guadagno ha la stessa forma del diagramma di irradiazione.

Passiamo adesso a considerare la normalizzazione del guadagno. Data la relazione

$$\frac{dP_{irr}}{d\Sigma} = g(\hat{r}) \frac{P_{al}}{4\pi r^2} \quad (3.13)$$

se integriamo ambo i membri rispetto ad una superficie Σ (viene considerata una sfera come area di integrazione semplicemente per ragioni di semplicità di calcolo) otteniamo

$$\int_{\Sigma} d\Sigma \frac{dP_{irr}}{d\Sigma} = \frac{P_{al}}{4\pi} \int_{\Sigma} d\Sigma g(\hat{r}) \frac{1}{r^2} \quad (3.14)$$

ma ovviamente

$$\int_{\Sigma} d\Sigma \frac{dP_{irr}}{d\Sigma} = P_{irr} \quad (3.15)$$

e quindi

$$P_{irr} = \frac{P_{al}}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma}{r^2} g(\hat{r}) \quad (3.16)$$

$$\int_{\Sigma} \frac{d\Sigma}{r^2} g(\hat{r}) = 4\pi \frac{P_{irr}}{P_{al}} = 4\pi\eta \quad (3.17)$$

Spesso conviene scrivere l'integrale in coordinate sferiche, dove

$$d\Sigma = r^2 d\theta d\phi \sin\theta \quad (3.18)$$

cioè

$$\frac{d\Sigma}{r^2} = d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi \quad (3.19)$$

Possiamo allora scrivere

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta g(\theta, \phi) = 4\pi\eta \quad (3.20)$$

e si ottiene così la *relazione di normalizzazione del guadagno*. Questa relazione ci dice che il guadagno (massimo) di un'antenna **non** è indipendente dalla forma del diagramma di irradiazione $g(\hat{r})$.

L'obiettivo che ci porremo nel seguito è quello di determinare la distribuzione delle correnti elettriche e magnetiche sull'antenna. Nella grande maggioranza dei casi tale calcolo è molto oneroso e richiede un approccio numerico, ma per molte delle antenne di uso comune è possibile dare una ragionevole approssimazione della distribuzione della corrente sulla loro superficie. Notiamo che questo problema è l'“inverso” di quello affrontato nel precedente capitolo, in cui si è visto come determinare il campo elettromagnetico quando è nota la distribuzione di corrente responsabile dell'irradiazione.

3.2.2 Antenne con due morsetti e altezza efficace

Appartengono alla classe delle *antenne con due morsetti* tutte le antenne per le quali è possibile isolare due morsetti attraverso i quali alimentarle (per esempio le antenne alimentate da guide d'onda non rientrano in questa categoria). Due classi importanti di antenne con due morsetti sono quella delle cosiddette *antenne filari*, composte da fili, o meglio da tubi, metallici (ad esempio un dipolo o una spira, Fig. 3.1), e quella delle *antenne stampate*, le quali vengono realizzate su supporti dielettrici e sono molto adoperate oltre il GHz (ad esempio l'antenna in microstriscia, Fig. 3.2).

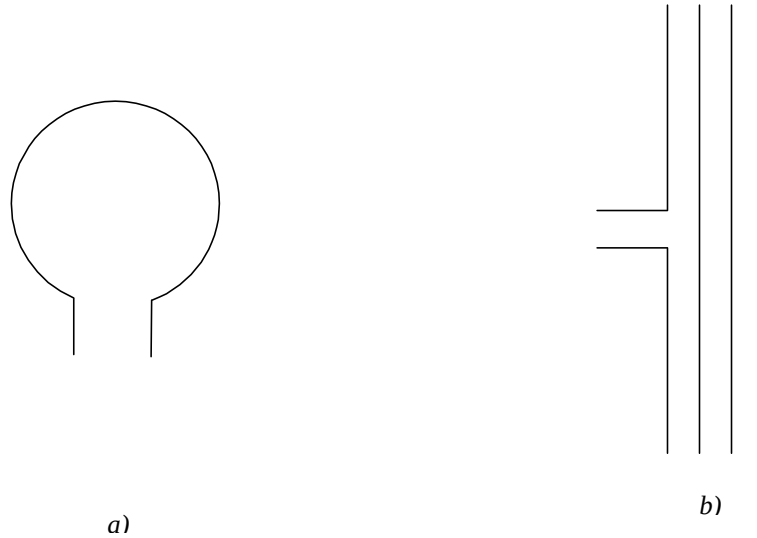


Figura 3.1. Esempi di antenne filari.

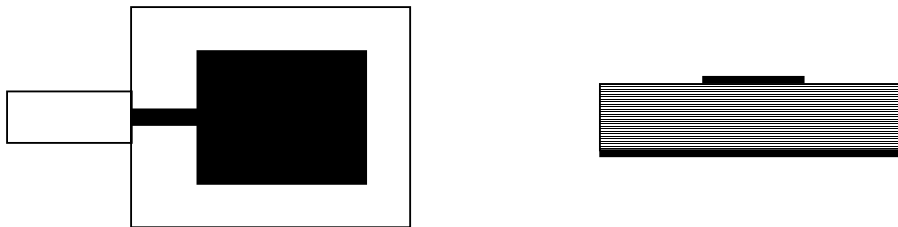


Figura 3.2. Antenna in microstriscia.

La schematizzazione che verrà utilizzata è quella di Fig. 3.3, che indica propriamente una antenna a dipolo, ma che useremo qui come simbolo per una qualunque antenna con due morsetti (a meno che ci sia un disegno più specifico).

Avendo a disposizione due morsetti possiamo supporre che valgano le leggi dell'Elettrotecnica²; dunque pensiamo di applicare una tensione V_a misurando la corrente I_a che si stabilisce nei morsetti. In questo modo agli effetti del circuito di alimentazione l'antenna può essere vista come un dispositivo lineare e passivo di impedenza Z_a data da

²Intendiamo con il termine "Elettrotecnica" sia la teoria dei circuiti concentrati (leggi di Kirchoff) che distribuiti (linee di trasmissione).

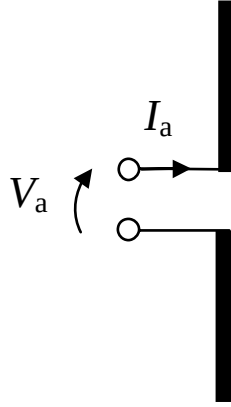


Figura 3.3. Schema di un'antenna con due morsetti fisici.

$$Z_a = \frac{V}{I_a} = R_a + jX_a \quad (3.21)$$

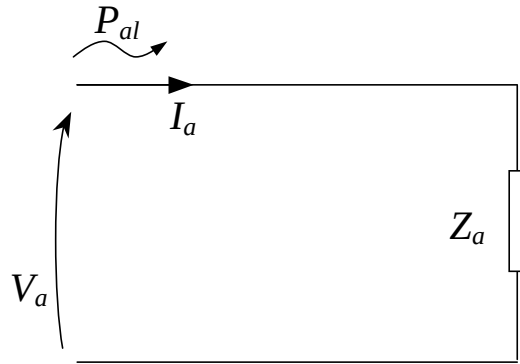


Figura 3.4. Equivalente elettrico di un'antenna con due morsetti.

che diremo *impedenza di antenna*. La potenza di alimentazione, ovvero la potenza erogata all'antenna può quindi essere espressa in funzione di queste quantità come

$$P_{al} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ Z_a |I_a|^2 \} = \frac{1}{2} R_a |I_a|^2 \quad (3.22)$$

Nel paragrafo 3.2.1 si è visto che non tutta la potenza assorbita dall'antenna viene effettivamente irradiata, in quanto una parte viene dissipata in calore (vedere eq. 3.5); in termini delle quantità che caratterizzano il circuito equivalente dell'antenna, ora introdotti, la (3.5) potrà essere riscritta come

$$P_{al} = \frac{1}{2} R_{irr} |I_a|^2 + \frac{1}{2} R_\Omega |I_a|^2 \quad (3.23)$$

dove $\frac{1}{2} R_\Omega |I_a|^2$ è la potenza dissipata in calore, mentre per differenza $\frac{1}{2} R_{irr} |I_a|^2$ deve essere intesa come la potenza effettivamente irradiata. La resistenza di antenna R_a è allora da

intendersi composta di due termini, cioè

$$R_a = R_{irr} + R_\Omega \quad (3.24)$$

dove R_Ω è la resistenza responsabile delle perdite ohmiche e R_{irr} tiene conto circuitalmente della potenza irradiata, cioè che il generatore che alimenta l'antenna cede allo spazio circostante; questa resistenza R_{irr} è detta *resistenza di irradiazione*. Si giunge così ad una nuova espressione del rendimento ohmico η dell'antenna (definito nel paragrafo 3.2)

$$\eta = \frac{P_{irr}}{P_{al}} = \frac{\frac{1}{2}R_{irr}|I_a|^2}{\frac{1}{2}R_{irr}|I_a|^2 + \frac{1}{2}R_\Omega|I_a|^2} = \frac{R_{irr}}{R_{irr} + R_\Omega} \quad (3.25)$$

La reattanza di antenna X_a esprime invece l'effetto reattivo della stessa, cioè la “reazione” del dispositivo al tentativo di fornirgli potenza attiva. Essa è dunque legata all'energia reattiva concentrata nelle immediate vicinanze dell'antenna (in regione di campo vicino, come è stato visto per il dipolo elementare). Per poter trasformare (o estrarre) in modo efficiente energia alla (o dalla) antenna è quindi necessaria una opportuna compensazione della parte reattiva di Z_a .

Spesso ai fini del progetto di un'antenna, è importante stabilire un legame tra i parametri circuitali e quelli che descrivono l'irradiazione nello spazio; ad esempio, il valore della R_{irr} può essere influenzato dalla proprietà di direttività. Il campo elettromagnetico irradiato può essere determinato attraverso la conoscenza della funzione vettoriale $\underline{P}_e(\hat{r})$ (come visto nel paragrafo 2.5.4), che coinvolge le trasformate di Fourier delle densità di corrente $\underline{J}_e$ e $\underline{J}_m$ e dipende quindi dalla potenza di alimentazione. Le informazioni contenute in $\underline{P}_e(\hat{r})$ sono dunque di duplice natura: riguardano la geometria dell'antenna (distribuzione delle correnti) e la sua alimentazione. Per disaccoppiare tali informazioni nell'espressione di $\underline{P}_e(\hat{r})$ si normalizza il vettore di irradiazione rispetto alla corrente di alimentazione I_a . Si scrive allora

$$\underline{P}_e(\hat{r}) = I_a \underline{h}_e(\hat{r}) \quad (3.26)$$

dove la nuova grandezza $\underline{h}_e(\hat{r})$ esprime le sole caratteristiche direzionali dell'antenna ed è invece indipendente dalla potenza di alimentazione. Dall'analisi dimensionale della espressione (3.26) risulta evidente che tale grandezza deve essere espressa in metri e viene per questo chiamata *altezza efficace* (in trasmissione) dell'antenna.

Possiamo legare il guadagno dell'antenna al modulo della sua altezza efficace. Infatti abbiamo

$$g(\hat{r}) = \frac{dP_{irr}/d\Sigma}{P_{al}/4\pi r^2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{Z_0}|\underline{E}|^2}{P_{al}/4\pi r^2} \quad (3.27)$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\frac{Z_0}{2r\lambda_0} e^{-jk_0 r} \underline{P}_e(\hat{r}) = -j\frac{Z_0}{2r\lambda_0} e^{-jk_0 r} I_a \underline{h}_e(\hat{r}) \quad (3.28)$$

e quindi

$$\frac{dP}{d\Sigma} = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_0} \frac{Z_0^2}{4r^2\lambda_0^2} |I_a|^2 |\underline{h}_e(\hat{r})|^2 \quad (3.29)$$

Il guadagno può dunque essere espresso nella forma

$$\begin{aligned} g(\hat{r}) &= \frac{1}{2} \frac{Z_0 |I_a|^2 |\underline{h}_e(\hat{r})|^2}{\frac{4\pi r^2}{P_{al}} \lambda_0^2} = \frac{1}{2} \pi \frac{Z_0 |I_a|^2 |\underline{h}_e(\hat{r})|^2}{P_{al} \lambda_0^2} = \\ &= \frac{1}{2} \pi \frac{Z_0 |I_a|^2 |\underline{h}_e(\hat{r})|^2}{\frac{1}{2} R_a |I_a|^2 \lambda_0^2} = \pi \frac{Z_0 |\underline{h}_e(\hat{r})|^2}{R_a \lambda_0^2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

essendo $P_{al} = \frac{1}{2} R_a |I_a|^2$. Questa espressione permette di avere un legame fra le grandezze g , $\underline{h}_e$, R_a . Si noti che $\underline{h}_e$ caratterizza completamente il comportamento irradiativo di un'antenna, ed include sia informazioni energetiche e di direttività, sia informazioni sullo stato di polarizzazione del campo irradiato. Se si suppone che il rendimento η sia pressoché unitario, cioè che $R_\Omega \ll R_{irr}$, allora

$$P_{al} \simeq P_{irr} = \frac{1}{2} R_{irr} |I_a|^2 \quad (3.31)$$

Sfruttando il vettore di Poynting possiamo poi scrivere

$$P_{irr} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \oint_{\Sigma} d\Sigma \hat{n} \cdot \underline{S} \right\} \quad (3.32)$$

dove Σ è una qualunque superficie che circonda l'antenna. Questo ci consente di determinare una formula per il calcolo di R_{irr} , ed integrando su una superficie sferica in campo lontano

$$\frac{1}{2} R_{irr} |I_a|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d\Sigma \frac{1}{Z_0} |\underline{E}|^2 \quad (3.33)$$

Considerando la (3.28) abbiamo inoltre che

$$|\underline{E}|^2 = \frac{Z_0^2}{4r^2 \lambda_0^2} |I_a|^2 |\underline{h}_e(\hat{r})|^2 \quad (3.34)$$

e dunque

$$\frac{1}{2} R_{irr} |I_a|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d\Sigma \frac{1}{Z_0} \frac{Z_0^2}{4r^2 \lambda_0^2} |I_a|^2 |\underline{h}_e(\hat{r})|^2 \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{2} R_{irr} |I_a|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_0} \frac{Z_0^2}{4r^2 \lambda_0^2} |I_a|^2 \int_{\Sigma} d\Sigma |\underline{h}_e(\hat{r})|^2 \quad (3.36)$$

In coordinate sferiche $d\Sigma = r^2 d\theta d\phi \sin \theta = r^2 d\Omega$ e quindi

$$\frac{1}{2} R_{irr} |I_a|^2 = \frac{1}{2} \frac{Z_0}{4r^2 \lambda_0^2} |I_a|^2 r^2 \int_{\Omega_{tot}} d\Omega |\underline{h}_e(\hat{r})|^2 \quad (3.37)$$

$$R_{irr} = \frac{Z_0}{4} \int_{\Omega_{tot}} d\Omega \frac{|\underline{h}_e(\hat{r})|^2}{\lambda_0^2} = \frac{Z_0}{4} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{|\underline{h}_e(\hat{r})|^2}{\lambda_0^2} \quad (3.38)$$

Ne risulta che la resistenza di irradiazione è legata all'integrale del diagramma di irradiazione normalizzato. Se si riesce a stimare la corrente I_a e il modulo dell'altezza efficace, si può determinare l'espressione della R_{irr} dalla formula precedente.

3.2.3 Diagramma di irradiazione isotropico, direzionale e omnidirezionale

Per radiatore *isotropico*, come già accennato, si intende *un'ipotetica antenna, senza perdite, che irradia la medesima potenza in ogni direzione dello spazio*. Il radiatore isotropico è spesso preso come riferimento per la definizione di guadagno, cioè per esprimere le caratteristiche di direttività delle antenne reali.

Un'antenna *direttiva* è caratterizzata dalla proprietà di *irradiare o ricevere onde elettromagnetiche con maggior efficacia in alcune direzioni anziché in altre*, questa terminologia è spesso applicata a quelle antenne la cui direttività massima è molto più grande di quella del dipolo in mezz'onda.

Infine un'antenna si dice *omnidirezionale*, quando *presenta un diagramma di irradiazione essenzialmente non direzionale in un dato piano e direzionale nel piano ortogonale al precedente* (un'antenna omnidirezionale è un caso particolare di quella direttiva).

3.2.4 Piani principali

Per le antenne a polarizzazione lineare si definisce

piano E il piano contenente il vettore campo elettrico e la direzione di massima irradiazione, piano H il piano contenente il vettore campo magnetico e la direzione di massima irradiazione. Questi sono i piani principali dell'antenna, in cui vengono spesso definite le caratteristiche irradiative.

Lobi del diagramma d'irradiazione

Un lobo è *una porzione del diagramma d'irradiazione limitato da due minimi (o nulli)*; in particolare si definisce *lobo principale* quello che *contiene la direzione di massima irradiazione*, mentre tutti gli altri sono detti *lobi secondari*.

HPBW e FNBW

Spesso per definire le caratteristiche di un'antenna sono molto utili due parametri che definiscono l'ampiezza del lobo principale e la direttività dell'antenna (vd. Fig 3.5). La definizione di HPBW (*Half Power Beam Width*) è la seguente: *in un piano contenente la direzione del massimo di irradiazione, l'HPBW corrisponde all'angolo tra le due direzioni in cui la densità di potenza irradiata è pari alla metà del valore massimo*; in altre parole se $g(\theta)$ indica il diagramma d'irradiazione nel piano $\phi = \text{cost.}$ considerato, e θ_{3dB} è l'angolo per cui $g(\theta_{3dB}) = \frac{G}{2}$, allora $HPBW = 2\theta_{3dB}$.

Parimenti con FNBW (*First Null Beam Width*) si indica l'ampiezza angolare totale del lobo principale, cioè tra due nulli (se presenti); altrimenti detto, $FNBW = 2\theta_0$ con θ_0 tale per cui $g(\theta_0) = 0$.

Esiste una formula approssimata che lega la larghezza del lobo principale ed il guadagno di un'antenna; essa è data da:

$$G \approx \frac{K}{HPBW_1 HPBW_2} \quad (3.39)$$

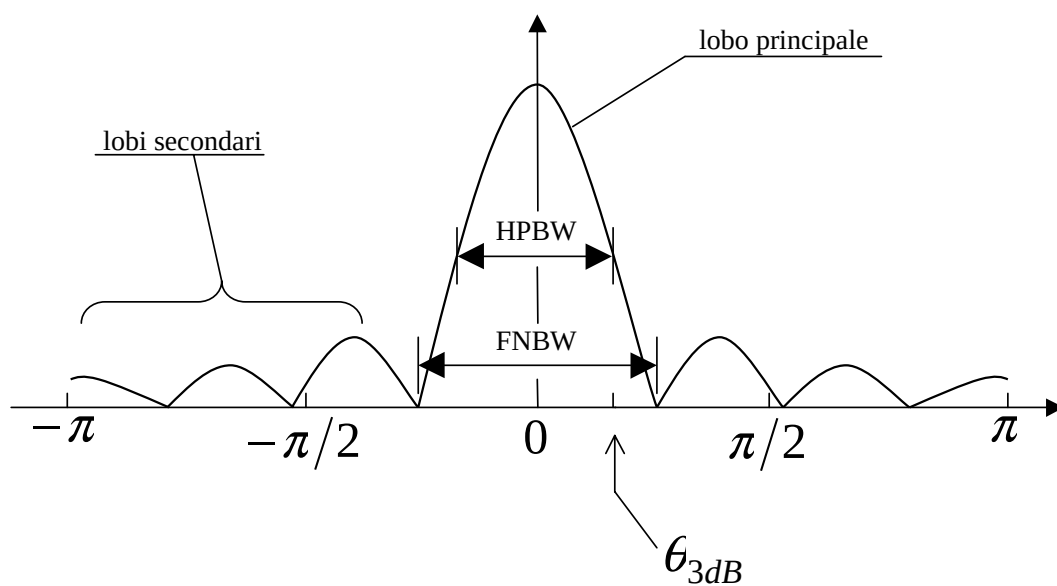


Figura 3.5. Diagramma d'irradiazione e lobi associati

ove G indica il guadagno dell'antenna e $HPBW_{1,2}$ sono le ampiezze del fascio a 3 dB nei due piani tra loro principali (piano E e piano H per polarizzazione lineare), K è una costante che, se si esprime il guadagno in numero (cioè non in dB) e gli angoli in gradi, allora è pari circa a $3 \cdot 10^4$.

4

L'antenna in ricezione e reciprocità

4.1 Antenne in ricezione

Fino ad ora abbiamo considerato il problema della determinazione del campo irradiato da una antenna nota l'alimentazione al suo ingresso. Vogliamo ora trattare l'aspetto duale per giungere ad un modello idoneo a descrivere l'antenna in ricezione, ovvero quando è “investita” da un campo esterno. In questo caso sarà nota l'espressione del campo elettromagnetico in spazio libero e si dovrà determinare la distribuzione della corrente sulla superficie dell'antenna. La trattazione appare meno “intuitiva” rispetto a quella vista per l'antenna trasmittente, ma possiamo avvalerci del teorema di reciprocità –che qui tratteremo–, il quale permette di asserire una completa simmetria tra il fenomeno trasmissivo e quello ricettivo. Definiamo, come d'abitudine nella letteratura sull'argomento, il *campo incidente* come quello che ci sarebbe nella regione occupata dall'antenna se questa non ci fosse. Inoltre, considereremo sempre che l'antenna ricevente sia nella regione di campo lontano della sorgente (antenna, disturbo, etc.) che genera il campo incidente, così come i parametri irradiativi dell'antenna in trasmissione sono definiti rispetto alla regione di campo lontano. Il campo incidente sull'antenna in ricezione sarà allora un'onda sferica; si assume sempre, nella definizione dei parametri di antenna in ricezione, che le dimensioni dell'antenna stessa siano tali da poter considerare l'onda sferica come (localmente) piana e che vi sia una sola sorgente per il campo incidente, cioè una sola onda piana incidente sull'antenna ricevente. (Il caso di più sorgenti si tratta per diretta estensione con la sovrapposizione degli effetti dovuta alla linearità del problema). L'analisi rigorosa comporterebbe la soluzione di un problema ai valori al contorno sulla superficie dell'antenna (tipicamente, condizioni di annullamento del campo sulla superficie di un'antenna conduttrice). L'analisi in questi termini è assai complessa, ci limiteremo pertanto a cercare opportune approssimazioni (come già fatto per l'antenna in trasmissione). Notiamo soltanto che il campo effettivamente presente intorno ad una antenna in ricezione (RX) è significativamente diverso dal campo incidente, a causa del campo “riflesso” dall'antenna stessa. Definiamo quindi i parametri dell'antenna in ricezione per il caso di una sorgente di dimensione massima D_T a distanza $R \gg \lambda$ e $R \gg 2\frac{D_T^2}{\lambda}$; dobbiamo inoltre richiedere che l'onda incidente sia sostanzialmente piana nella regione occupata dall'antenna in ricezione. Più ragioni che provengono da considerazioni di reciprocità che vedremo più oltre (vedi 4.2), chiederemo che la sorgente stia in un punto $\underline{S}$ nella regione di campo lontano rispetto all'antenna ricevente pensata come trasmittente. In un sistema di riferimento come quello mostrato in Fig. 4.1, centrato nel punto di osservazione

$\underline{Q}$ in cui è posta l'antenna ricevente, la sorgente è collocata in un punto $\underline{S}$, per cui il versore $\hat{r} = \frac{\underline{S} - \underline{Q}}{|\underline{S} - \underline{Q}|}$ individua la direzione *da cui* incide l'onda, ovvero la direzione in cui è vista la sorgente $\underline{S}$ dall'antenna ricevente in $\underline{Q}$, ed è quindi chiamata “direzione di incidenza”. Si noti che la direzione $\hat{n}$ di propagazione dell'onda che raggiunge l'antenna ricevente è $\hat{n} = -\hat{r}$.

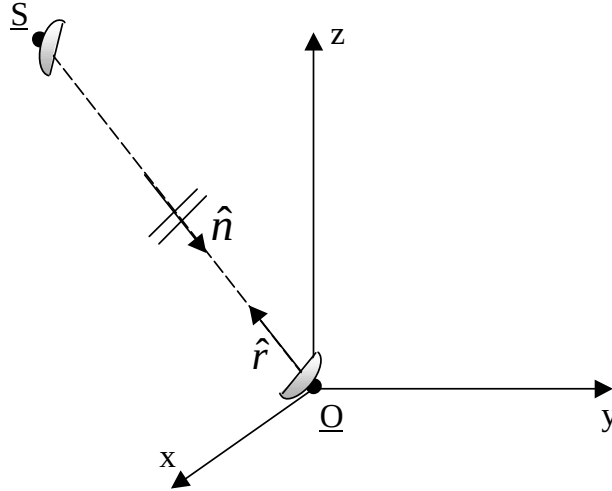


Figura 4.1. Sistema di riferimento centrato nel punto di osservazione. La sorgente è posta in $\underline{S}$.

4.1.1 Circuito equivalente e parametri caratteristici per un'antenna in ricezione

La determinazione del circuito equivalente per l'antenna in ricezione si affronta come un problema elettrotecnico. L'oggetto che sta al di là dei morsetti è lineare per la linearità delle equazioni di Maxwell, e fornisce potenza ad un circuito utilizzatore quando è investito da una onda elettromagnetica. Pertanto si può in generale rappresentare con un comune generatore reale, rappresentabile per esempio con l'equivalente Thevenin di Fig. 4.2 (o con un equivalente Norton). Sempre per la linearità delle equazioni di Maxwell, l'intensità del generatore equivalente sarà proporzionale al campo incidente. Applicando il teorema di Thevenin, Z_g rappresenta l'impedenza misurata ai morsetti A quando è stato “spento” il generatore di tensione V_g . Essendo V_g un segnale proporzionale al campo incidente porre $V_g = 0$ equivale a “spegnere” la sorgente che genera tale campo. Applicando allora in tali condizioni un generatore V_t ai morsetti d'antenna si misurerà la corrente che entra in essi: così facendo l'antenna in ricezione si trasforma evidentemente in antenna in trasmissione. In questa configurazione l'impedenza Z_g che si misura è chiaramente l'impedenza di ingresso Z_a della stessa antenna considerata però in trasmissione,

$$Z_g^{(rx)} = Z_a^{(tx)} \quad (4.1)$$

l'intensità V_g del generatore ideale nel circuito equivalente Thevenin è legata, come abbiamo già detto, al campo incidente sull'antenna, e inoltre il legame deve essere lineare in quanto lo sono

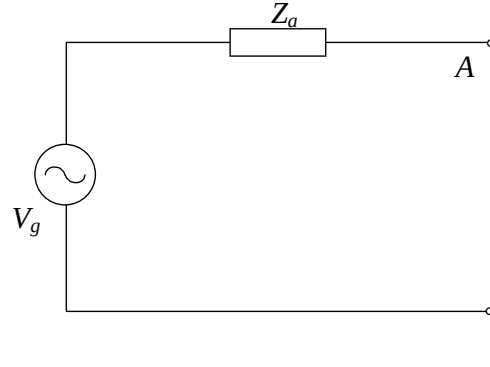


Figura 4.2. Equivalente Thevenin in ricezione.

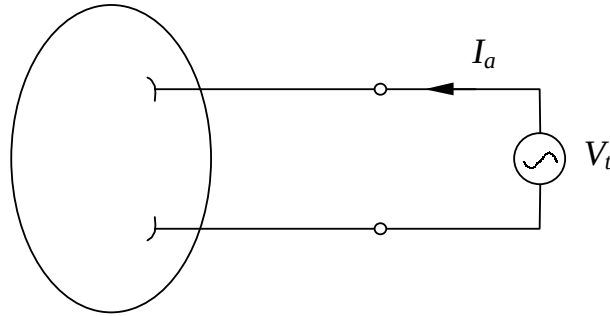


Figura 4.3. Misura dell'impedenza dell'antenna in ricezione.

le equazioni di Maxwell. La generica relazione lineare che esprime la dipendenza della tensione dal campo deve consentire di trasformare una grandezza vettoriale (campo) in una grandezza scalare (tensione), e quindi scriviamo

$$V_g = \underline{h}_e^{(rx)} \cdot \underline{E}^{inc}(\underline{Q}) \quad (4.2)$$

dove $\underline{Q}$ è il centroide dell'antenna. Definiamo $\underline{h}_e^{(rx)}$ *altezza efficace* (in ricezione), funzione della direzione di osservazione, che ha la dimensione di una lunghezza

$$[\underline{h}_e^{(rx)}] = \frac{[V_g]}{[\underline{E}^{inc}(\underline{Q})]} = \frac{V}{V/m} = m \quad (4.3)$$

In generale, l'antenna può avere un comportamento direttivo anche in RX: si pensi ad esempio ad un telescopio che riceve (luce) solo da una regione angolare molto ristretta. Pertanto, in generale dobbiamo scrivere $V_a = V_a(\hat{r})$. Appare dunque chiara l'importanza della direzione in cui è orientata l'antenna rispetto alla direzione dell'onda incidente. Per evidenziare le caratteristiche energetiche e quelle vettoriali del campo incidente e dell'antenna, possiamo scrivere

$$\underline{h}_e^{(rx)} = |\underline{h}_e^{(rx)}| \hat{p}^{(rx)} \quad (4.4)$$

con

$$\hat{p}^{(rx)} = \frac{\underline{h}_e^{(rx)}}{|\underline{h}_e^{(rx)}|} \quad (4.5)$$

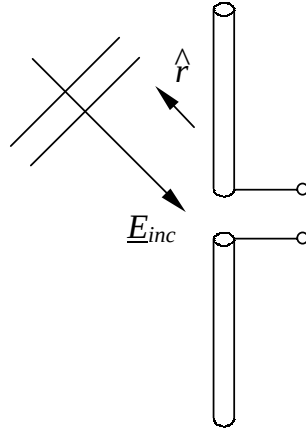


Figura 4.4. Campo incidente su un'antenna con due morsetti.

che chiamiamo *versore di polarizzazione* dell'antenna in ricezione, che tiene conto delle proprietà vettoriali dell'antenna ricevente (in modo duale era stato definito un versore $\hat{p}$ per l'antenna trasmittente).

4.1.2 Potenza ricevuta

Procediamo quindi nell'analisi dell'antenna ricevente per definire una grandezza scalare che esprima lo scambio energetico tra l'antenna stessa e il circuito utilizzatore. Quello che ci interessa calcolare è la potenza $P^{(rx)}$ erogata al ricevitore, la quale dipende dai tre parametri V_g (funzione del campo incidente), Z_a e $Z^{(rx)}$, impedenza che caratterizza lo stadio di ingresso del ricevitore a valle dell'antenna (vedi Fig. 4.5). Precisiamo che l'impedenza $Z^{(rx)}$ è un parametro

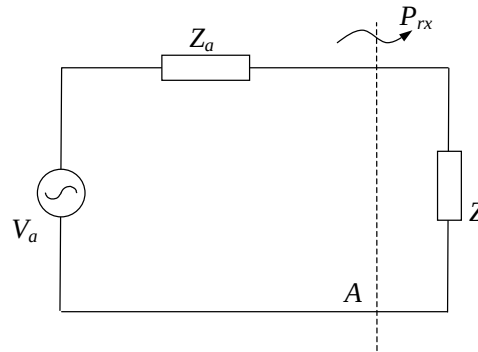


Figura 4.5. Equivalente di antenna e circuito ricevente.

“esterno” all'antenna, mentre è evidente l'esigenza di caratterizzare le proprietà (per esempio energetiche) dell'antenna “indipendentemente” dalle caratteristiche dei circuiti ad essa connessi (per esempio indipendentemente dal tipo di ricevitore che è collegato all'antenna). Il modo più proficuo di definire tali caratteristiche energetiche è quello di fare ricorso alla *potenza disponibile* ai morsetti dell'antenna, che è la massima potenza erogabile a qualunque circuito utilizzatore

(a parità di tutte le altre condizioni), ovvero quando $Z^{(rx)} = Z_a^*$, e per cui

$$P_{disp} = \frac{1}{2} \frac{|V_a|^2}{4R_a} \quad (4.6)$$

dove $R_a = \text{Re} \{Z_a\}$. Sostituendo l'espressione della tensione abbiamo

$$P_{disp} = \frac{1}{2} \frac{1}{4R_a} |\underline{h}_e^{(rx)} \cdot \underline{E}^{inc}|^2 \quad (4.7)$$

Separando le grandezze vettoriali (dipendenti dalla polarizzazione) da quelle scalari legate alle questioni energetiche otteniamo

$$\underline{E}^{inc} = |\underline{E}^{inc}| \hat{p}^{inc} \quad (4.8)$$

campo che si suppone noto (è il campo che “investe” l'antenna). $\hat{p}^{inc}$ rappresenta il vettore di polarizzazione della sorgente che ha generato il campo. Introducendo la (4.8) nella (4.7) si ha

$$P_{disp} = \frac{1}{2} \frac{1}{4R_a} |\underline{h}_e^{(rx)}|^2 |\underline{E}^{inc}|^2 |\hat{p}^{inc} \cdot \hat{p}^{(rx)}|^2 \quad (4.9)$$

Si pone poi

$$\chi \equiv |\hat{p}^{inc} \cdot \hat{p}^{(rx)}|^2 \quad (4.10)$$

Così da determinare una dipendenza di P_{disp} dalla direzione dell'onda, cioè $P_{disp} = P_{disp}(\hat{r})$.

$$P_{disp}(\chi, \hat{r}) = \frac{1}{2} \frac{1}{4R_a} |\underline{h}_e^{(rx)}(\hat{r})|^2 |\underline{E}^{inc}(\hat{r})|^2 \chi(\hat{r}) \quad (4.11)$$

Fissata la direzione del campo incidente $\hat{r}$ la potenza disponibile infatti dipende dal termine $\chi(\hat{r})$ ovvero dai due versori di polarizzazione in trasmissione e ricezione. Dato che $|\hat{p}|^2 = 1$ è evidente che

$$\chi = |\hat{p}^{inc} \cdot \hat{p}^{(rx)}|^2 \leq 1 \quad (4.12)$$

Se $\chi = 1$ per una certa direzione di osservazione $\hat{r}$ si dice che si è in condizioni di *adattamento di polarizzazione*. In tal caso possiamo scrivere

$$P_{disp,max}(\hat{r}) = \frac{1}{2} \frac{|\underline{h}_e^{(rx)}(\hat{r})|^2 |\underline{E}^{inc}(\hat{r})|^2}{4R_a} \quad (4.13)$$

La caratterizzazione energetica dell'antenna in ricezione per ogni direzione $\hat{r}$, cioè la potenza disponibile ai suoi morsetti, sarà quindi determinata dalle grandezze

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{disp,max}(\hat{r}) \\ |\hat{p}^{(rx)} \cdot \hat{p}^{inc}|^2 = \chi \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Si tenga conto che, mentre P_{disp} rappresenta la massima potenza trasferibile al carico, per le assegnate condizioni di incidenza e polarizzazione $P_{disp,max}$ rappresenta invece la massima potenza trasferibile ad un carico per incidenza da una certa direzione $\hat{r}$, ovvero quando

a) il carico è adattato;

b) l'antenna in RX ed il campo incidente sono equipolarizzati.

Appare evidente dalla (4.12) che la condizione per avere adattamento di polarizzazione è data da

$$\left| \hat{p}^{(rx)} \cdot \hat{p}^{inc} \right|^2 = 1 \quad (4.15)$$

e svolgendo i calcoli si vede che ciò si ottiene se $\hat{p}^{(rx)} = (\hat{p}^{inc})^*$. Si noti che in generale $\hat{p}$ sono versori complessi.

Le espressioni che sono state derivate permettono di constatare immediatamente l'esigenza di adattare la polarizzazione dell'antenna in ricezione con le caratteristiche vettoriali del campo incidente al fine di rendere massimo il trasferimento di potenza. Proseguendo la nostra analisi, scriviamo

$$P_{disp,max}(\hat{r}) \propto |\underline{E}^{inc}|^2 \quad (4.16)$$

e sfruttando la relazione

$$\left(\frac{dP}{d\Sigma} \right)_{inc} = \frac{1}{2} \frac{|\underline{E}^{inc}|^2}{Z_0} \quad (4.17)$$

è possibile esprimere la potenza disponibile $P_{disp,max}$ in funzione della densità di potenza incidente $\left(\frac{dP}{d\Sigma} \right)_{inc}$, tramite il parametro a_{eq} ,

$$P_{disp,max}(\hat{r}) = a_{eq}(\hat{r}) \left(\frac{dP}{d\Sigma} \right)_{inc} \quad (4.18)$$

L'analisi dimensionale dell'espressione permette di concludere che il parametro a_{eq} deve essere espresso in m², pertanto si definisce $a_{eq}(\hat{r})$ *area equivalente in ricezione* dell'antenna. Per un'antenna in cui si può determinare un'area geometrica (per esempio un paraboloide) si definisce il parametro *efficienza di apertura* o *fattore di bocca* ν che lega l'area geometrica A_{geom} all'area equivalente massima A_{eq} tramite la relazione

$$A_{eq} = \max_{\hat{r}} \{a_{eq}\} = \nu A_{geom} \quad \text{con } \nu \leq 1 \quad (4.19)$$

Essendo $a_{eq}(\hat{r})$ legata alle caratteristiche energetiche dell'antenna, è naturale pensare che esista una relazione tra questa quantità ed il guadagno in trasmissione. L'area equivalente è un parametro che contraddistingue qualsiasi tipo di antenna, indipendentemente dalla forma fisica della sua connessione circuitale (morsetti o guida di accesso), in quanto è sempre possibile determinare una relazione tra la potenza e la sua densità. Pertanto potrà essere considerato un parametro generale utilizzabile per il confronto tra classi diverse di antenne. Ad esempio per un'antenna con due morsetti (per la quale ha senso definire un'altezza efficace in ricezione) abbiamo

$$P_{disp,max} = \frac{1}{2} \frac{|\underline{h}_e^{(rx)}| |\underline{E}^{inc}|^2}{4R_a} = a_{eq} \frac{1}{2} \frac{|\underline{E}^{inc}|^2}{Z_0} \Rightarrow a_{eq}(\hat{r}) = \left| \underline{h}_e^{(rx)} \right|^2 \frac{Z_0}{4R_a} \quad (4.20)$$

4.2 Reciprocità

4.2.1 Introduzione alla reciprocità

Per introdurre il concetto di reciprocità delle equazioni di Maxwell, possiamo citarne una forma che appartiene alla comune esperienza sensibile, considerando un semplice esempio nel campo del visibile. Dati un osservatore e una sorgente luminosa, se la sorgente è posta in maniera tale che l'osservatore è in grado di vederla, scambiando la posizione dell'osservatore con quella della sorgente l'osservatore continua a vedere la sorgente. D'altro canto è noto dall'Elettrotecnica il concetto di reciprocità per una rete; allora procedendo per gradi richiamiamo inizialmente il teorema di reciprocità per una rete a parametri concentrati e poi, in seguito, introdurremo questo concetto nel campo dell'Elettromagnetismo.

Per l'analisi della reciprocità per un doppio bipolo (vedi Fig. 4.6.a), si possono considerare due situazioni circuitali differenti; l'una (a) con il doppio bipolo alimentato sulla porta 1 con un generatore di corrente I_{ga} (sorgente) e caricato sulla porta 2 dall'ammettenza Y_{e2} , e l'altra (b) in cui si scambia la posizione della sorgente (generatore di corrente I_{gb}) con quella dell'osservatore (tensione V sul carico), lasciando immutato il resto della rete (vedi Fig. 4.6.b). Una rete a

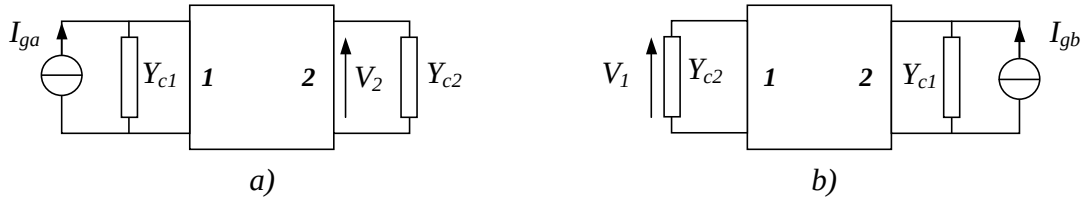


Figura 4.6. Doppio bipolo in due situazioni circuitali differenti.

parametri concentrati si dice reciproca se il prodotto delle sorgenti nel circuito (a) per l'effetto nel circuito (b) è uguale alle sorgenti in (b) per l'effetto in (a). In termini di grandezze elettriche si ha

$$I_{ga} V_1^{(b)} - I_{gb} V_2^{(a)} = 0 \quad (4.21)$$

ovvero il rapporto tra l'effetto (V) e la sorgente (I_g) che lo ha prodotto nella situazione (a) è uguale al rapporto tra l'effetto e la sorgente che lo ha prodotto nella situazione (b)

$$\frac{V_1^{(b)}}{I_{gb}} = \frac{V_2^{(a)}}{I_{ga}} \quad (4.22)$$

Si può dimostrare che la presenza di soli componenti lineari e reciproci in una rete è condizione sufficiente per la sua reciprocità globale. Il concetto di reciprocità per una rete si ripercuote sulla matrice delle impedenze $[Z]$: per il doppio bipolo indicato in Fig. 4.6 si ha

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Dalla relazione matriciale, con riferimento alla Fig. 4.6 e ponendo rispettivamente $Y_{e2} = 0$ e

$Y_{e1} = 0$ otteniamo le seguenti espressioni:

$$\frac{V_1^{(b)}}{I_{gb}} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} ; \quad \frac{V_2^{(a)}}{I_{ga}} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad (4.24)$$

dalle quali, applicando successivamente la condizione di reciprocità, rappresentata dalla relazione (4.22), si ricava

$$\frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad (4.25)$$

Poiché i due membri della (4.25) non sono altro che le mutue impedenze della matrice $[Z]$ si ha allora

$$[Z] = [Z]^T \quad (4.26)$$

La (4.26) esprime la simmetria della matrice $[Z]$ per una rete che soddisfa il concetto di reciprocità.

4.2.2 Lemma di Lorentz

In questo paragrafo ci proponiamo di generalizzare il concetto di reciprocità dell'Elettrotecnica ricavando, appunto, il teorema di reciprocità per le equazioni di Maxwell. Nel derivare tale teorema (o lemma) procederemo utilizzando l'analogia esistente tra le grandezze che descrivono una rete elettrica, tensioni e correnti, e le grandezze elettromagnetiche, rispettivamente campo $\underline{E}$ e campo $\underline{H}$. Questo ci permetterà di comprendere meglio il procedimento ed il suo risultato. Procedendo come per il paragrafo precedente, ricaviamo un legame tra sorgenti e campi in una data struttura (passiva) in due condizioni diverse di eccitazione. L'interesse per due diverse condizioni di eccitazione è dovuto qui anche al fatto che un'antenna può trasmettere e ricevere; in un caso le sorgenti alimentano l'antenna, nell'altro l'antenna riceve il campo prodotto dalle sorgenti.

Il teorema di reciprocità ammette due formulazioni, una di tipo differenziale, detta lemma di Lorentz, e l'altra di tipo integrale. Iniziamo col ricavare la prima di esse. Consideriamo una struttura materiale qualunque (per esempio due antenne), e due insiemi di sorgenti, la coppia $(\underline{J}_{e1}, \underline{J}_{m1})$ e la coppia $(\underline{J}_{e2}, \underline{J}_{m2})$; l'irradiazione avviene sempre nelle stesse condizioni, nel senso che i mezzi e le condizioni d'interfaccia rimangono immutate quando si usi l'uno o l'altro insieme di sorgenti. Ciascuna di queste coppie di sorgenti produce campi elettrici e magnetici che soddisfano le equazioni di Maxwell. Siano $\underline{E}_1(\underline{r})$ e $\underline{H}_1(\underline{r})$ i campi prodotti dalle sorgenti con pedice 1 ed $\underline{E}_2(\underline{r})$ e $\underline{H}_2(\underline{r})$ i campi prodotti dalle sorgenti con pedice 2. D'ora in poi faremo a meno di indicare la dipendenza dal punto così da evitare un appesantimento della notazione. Le equazioni di rotore risultanti sono

$$\begin{cases} -\nabla \times \underline{E}_1 = j\omega\mu\underline{H}_1 + \underline{J}_{m1} \\ +\nabla \times \underline{H}_1 = j\omega\epsilon\underline{E}_1 + \underline{J}_{e1} \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\begin{cases} -\nabla \times \underline{E}_2 = j\omega\mu\underline{H}_2 + \underline{J}_{m2} \\ +\nabla \times \underline{H}_2 = j\omega\epsilon\underline{E}_2 + \underline{J}_{e2} \end{cases} \quad (4.28)$$

Per avere un'espressione analoga alla (4.21) occorre avere termini in cui compaiono i prodotti tra le sorgenti e gli effetti. Eseguiamo pertanto il prodotto di ambo i membri della prima della (4.27) per $-\underline{H}_2$ e della seconda per $+\underline{E}_2$ e le (4.28) rispettivamente per $+\underline{H}_1$ e $-\underline{E}_1$. Sommando le equazioni risultanti membro a membro otteniamo

$$\begin{aligned} & +\nabla \times \underline{E}_1 \cdot \underline{H}_2 + \nabla \times \underline{H}_1 \cdot \underline{E}_2 - \nabla \times \underline{E}_2 \cdot \underline{H}_1 - \nabla \times \underline{H}_2 \cdot \underline{E}_1 = \\ & = -j\omega\mu\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 + j\omega\epsilon\underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2 + j\omega\mu\underline{H}_2 \cdot \underline{H}_1 - j\omega\epsilon\underline{E}_2 \cdot \underline{E}_1 + \\ & -\underline{J}_{m1} \cdot \underline{H}_2 + \underline{J}_{e1} \cdot \underline{E}_2 + \underline{J}_{m2} \cdot \underline{H}_1 - \underline{J}_{e2} \cdot \underline{E}_1 \end{aligned} \quad (4.29)$$

dove il secondo membro è stato ridotto nell'ipotesi di lavorare con mezzi isotropi, per i quali μ ed ϵ sono quantità scalari. Nel caso più generale di mezzi anisotropi μ ed ϵ sono grandezze diadiche (tensoriali) e la riduzione vale solo se le diadi con cui esse vengono definite sono simmetriche, cioè

$$\underline{\underline{\mu}}(\underline{r}) = \underline{\underline{\mu}}^T(\underline{r}) ; \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{r}) = \underline{\underline{\epsilon}}^T(\underline{r}) \quad (4.30)$$

Infatti si può osservare dalla equazione (4.29) che la riduzione è possibile solo se sussiste l'uguaglianza

$$(\underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{H}_1) \cdot \underline{H}_2 = (\underline{H}_2 \cdot \underline{\underline{\mu}}) \cdot \underline{H}_1 \quad (4.31)$$

dalla quale si ottiene

$$\underline{H}_1 \cdot \underline{\underline{\mu}}^T \cdot \underline{H}_2 = \underline{H}_2 \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{H}_1 \implies \underline{\underline{\mu}}(\underline{r}) = \underline{\underline{\mu}}^T(\underline{r}) \quad (4.32)$$

Condizione analoga si ricava per la permeabilità dielettrica $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{r})$.

Le ipotesi fatte sono del tutto realistiche nella stragrande maggioranza di applicazioni di tipo comunicazionistico, se si tiene conto che nel campo dell'irradiazione vengono sempre usati mezzi isotropi o anisotropi ma reciproci. Esse non valgono tipicamente in mezzi girotropici, quale il plasma (fortemente) magnetizzato, e ferromagnetici magnetizzati, quali le ferriti. Quest'ultima classe di mezzi è usata, nelle microonde, proprio per generare componenti non reciproci (isolatori, circolatori). Riprendendo il primo membro della (4.29) e usando l'identità

$$\nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot (\nabla \times \underline{A}) - \underline{A} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \quad (4.33)$$

si ha infine

$$\nabla \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) = (\underline{J}_{e1} \cdot \underline{E}_2 - \underline{J}_{e2} \cdot \underline{E}_1) - (\underline{J}_{m1} \cdot \underline{H}_2 - \underline{J}_{m2} \cdot \underline{H}_1) \quad (4.34)$$

che è nota come *lemma di Lorentz*.

4.2.3 Versione integrale del Lemma di Lorentz

La versione più utile del teorema di reciprocità per noi è quella che si ottiene dall'integrazione del lemma di Lorentz. Consideriamo una superficie chiusa con volume V , e integriamo sul suo volume la (4.34) ottenendo

$$\int_V d^3\underline{r} (\nabla \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1)) = \int_V d^3\underline{r} [(\underline{J}_{e1} \cdot \underline{E}_2 - \underline{J}_{e2} \cdot \underline{E}_1) - (\underline{J}_{m1} \cdot \underline{H}_2 - \underline{J}_{m2} \cdot \underline{H}_1)] \quad (4.35)$$

Il primo membro della (4.35), utilizzando il teorema di Gauss, si può trasformare in un integrale di superficie. Denotiamo con $\Sigma = \partial V$ la frontiera del volume V e $\hat{n}$ la normale a detta superficie come indicato in Fig. 4.7. Otteniamo allora

$$\oint_{\Sigma} d\Sigma \hat{n} \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) = \int_V d^3r (\underline{J}_{e1} \cdot \underline{E}_2 - \underline{J}_{m1} \cdot \underline{H}_2) - \int_V d^3r [(\underline{J}_{e2} \cdot \underline{E}_1 - \underline{J}_{m2} \cdot \underline{H}_1)] \quad (4.36)$$

dove i due integrali a secondo membro esprimono la media delle sorgenti con pedice 1 pesata dai campi con pedice 2 e viceversa. Al primo integrale a secondo membro si darà il nome di *reazione dei campi (2) sulle sorgenti (1)* e si indicherà con il simbolo “(2,1)”, mentre il secondo è la *reazione dei campi (1) sulle sorgenti (2)* e si indicherà con il simbolo “(1,2)”. L'espressione che ne risulta esprime allora il teorema di reciprocità

$$(2,1) - (1,2) = \oint_{\Sigma} d\Sigma \hat{n} \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \quad (4.37)$$

Osserviamo che il teorema di reciprocità non è una relazione energetica in quanto è coinvolto il prodotto esterno $\underline{E} \times \underline{H}$ anziché $\underline{E} \times \underline{H}^*$, come nel vettore di Poynting. D'altronde la reciprocità nota dall'Elettrotecnica implica la simmetria di $[Z]$ ($[Z] = [Z]^T$) e non che $[Z] = [Z]^{*T}$.

4.2.4 Forma forte del teorema di reciprocità

L'espressione del teorema di reciprocità per l'elettromagnetismo formulata nell'espressione (4.37) è analoga a quella vista in Elettrotecnica (Eq. (4.21)) a meno dell'integrale di superficie, pertanto è interessante esaminare in quali casi esso si annulli. Ciò accade quando

$$\oint_{\Sigma} d\Sigma \hat{n} \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) = 0 \quad (4.38)$$

1. Σ è su un conduttore ideale elettrico o magnetico.

(I conduttori magnetici ovviamente non esistono, ma sono un'utile schematizzazione). Se Σ è su un conduttore elettrico ideale la componente tangenziale del campo elettrico deve essere nulla, cioè

$$\hat{n} \times \underline{E}|_{\Sigma} = 0 \quad (4.39)$$

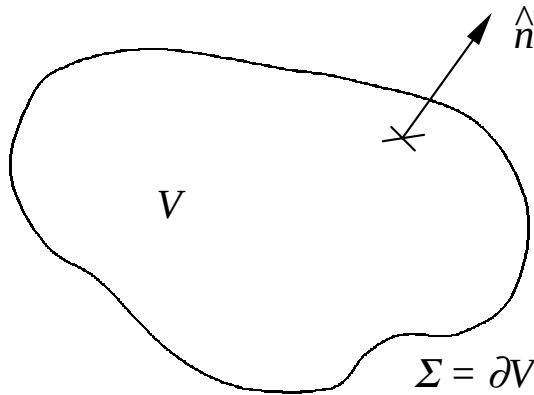


Figura 4.7. Rappresentazione delle grandezze usate.

allora se si commuta il prodotto triplo nell'integrando dell'equazione (4.38) si ottiene, considerando la (4.39)

$$\hat{n} \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2) - \hat{n} \cdot (\underline{E}_2 \times \underline{H}_1) = (\hat{n} \times \underline{E}_1) \cdot \underline{H}_2 - (\hat{n} \times \underline{E}_2) \cdot \underline{H}_1 = 0 \quad (4.40)$$

da cui segue l'espressione (4.38). Discorso analogo può essere fatto per il campo magnetico su un conduttore magnetico.

2. Σ è una superficie di impedenza.

In tal caso, come per esempio nei conduttori imperfetti, la condizione al contorno su Σ è

$$\hat{n} \times \underline{E}|_{\Sigma} = Z_s \underline{H}_{tan} \quad (4.41)$$

dove Z_s è l'impedenza superficiale. Si ottiene così l'integrando della (4.38) nullo per cancellazione infatti (ricordando che $\hat{n} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) = \hat{n} \cdot (\underline{E}_{tan} \times \underline{H}_{tan})$)

$$\hat{n} \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) = \hat{n} \times \underline{E}_1 \cdot \underline{H}_2 - \hat{n} \times \underline{E}_2 \cdot \underline{H}_1 = Z_s \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 - Z_s \underline{H}_2 \cdot \underline{H}_1 = 0 \quad (4.42)$$

3. Σ è una sfera di raggio $R \rightarrow \infty$.

Se Σ è molto lontana dalla sorgente vale l'approssimazione di campo lontano (vedi Eq.2.190)

$$\hat{r} \times \underline{E} = Z_0 \underline{H} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (4.43)$$

Se si arresta lo sviluppo all'ordine $\frac{1}{R^2}$ si ottiene una relazione d'impedenza e, come nel caso precedente, vale la relazione (4.38). Infatti poiché

$$d\Sigma = \mathcal{O}(R^2) \quad (4.44)$$

$$(\underline{E} \times \underline{H}) \cdot \hat{r} = \left[\underline{E} \times \left(\hat{r} \times \underline{E} \frac{1}{Z_0} \right) \right] \cdot \hat{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^4}\right) \quad (4.45)$$

l'integrale (4.38) diviene

$$\oint_{\Sigma} d\Sigma \left[\underline{E}_1 \times \left(\hat{r} \times \underline{E}_2 \frac{1}{Z_0} \right) - \underline{E}_2 \times \left(\hat{r} \times \underline{E}_1 \frac{1}{Z_0} \right) \right] + \oint_{\Sigma} d\Sigma \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^4}\right) \quad (4.46)$$

Il primo integrale è nullo in quanto lo è l'integrando, il secondo tende anch'esso a zero poiché il suo integrando

$$d\Sigma \cdot \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^4}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (4.47)$$

tende a 0 per $R \rightarrow \infty$. Si noti che se non ci fosse stata la relazione d'impedenza (termine dominante), il primo integrale della (4.46) non sarebbe stato nullo.

Nei casi sopra esaminati il teorema di reciprocità si riduce a

$$\int_V d^3r (\underline{J}_{e1} \cdot \underline{E}_2 - \underline{J}_{m1} \cdot \underline{H}_2) = \int_V d^3r (\underline{J}_{e2} \cdot \underline{E}_1 - \underline{J}_{m2} \cdot \underline{H}_1) \quad (4.48)$$

che viene chiamata *forma forte del teorema di reciprocità*.

4.2.5 Equivalenza di un'antenna in RX e in TX

Applichiamo ora il teorema di reciprocità per vedere quale “equivalenza” si possa stabilire tra un'antenna in TX e la stessa antenna in RX. Indichiamo come situazione (1) quella in cui l'antenna è in TX, cioè viene alimentata, e come situazione (2) quella in cui la stessa antenna è in RX, cioè è presente una sorgente esterna (e lontana).

Ci chiediamo ora se esiste un legame tra la $\underline{h}_e$ in ricezione ($\underline{h}_e^{(r)}$) e quella in trasmissione ($\underline{h}_e^{(t)}$). Chiamiamo $\underline{E}_1$ e $\underline{H}_1$ i campi relativi all'antenna in TX e $\underline{E}_2$ e $\underline{H}_2$ quelli relativi all'antenna in RX. La $\underline{h}_e^{(t)}$ è legata al campo trasmesso dalla relazione

$$\underline{E}_1(\underline{r}) = \frac{-jZ_0}{2r\lambda} e^{-jkr} \underline{h}_e^{(t)}(\hat{r}) I_{at} \quad (4.49)$$

mentre la $\underline{h}_e^{(r)}$ soddisfa la relazione

$$V_a = \underline{h}_e^{(r)}(\hat{r}) \cdot \underline{E}_2^{inc}(\underline{r}) \quad (4.50)$$

Quindi il quesito precedentemente posto si riduce a cercare il legame tra $\underline{E}_1$ e V_a . Per le sorgenti ($\underline{J}_{e2}, \underline{J}_{m2}$) la scelta è arbitraria: si hanno così due gradi di libertà. Poiché vogliamo calcolare solo il campo $\underline{E}_1$ risulta conveniente porre la sorgente $\underline{J}_{m2}$ nulla; in questo modo il termine $\underline{H}_1$ scompare dalla relazione (4.36). Per quanto riguarda la sorgente $\underline{J}_{e2}$ essa sarà del tipo

$$\underline{J}_{e2} = \underline{M} \delta(\underline{r} - \underline{R}) \quad (4.51)$$

perché di essa sappiamo calcolare il campo irradiato. Resta ancora un grado di libertà che viene usato nella scelta della superficie. Volendo caratterizzare l'antenna e non la struttura che la alimenta, si racchiude con un conduttore la regione che contiene le sorgenti (generatore a radiofrequenze (B)) e la si collega tramite un cavo coassiale all'antenna (ANT); se necessario si inserisce anche un simmetrizzatore (C) (vedi Fig. 4.8). Così facendo, siamo sicuri che ad irradiare è soltanto l'antenna (che vogliamo caratterizzare), e non quello che sta a monte di essa. Applichiamo ora il teorema di reciprocità. Poiché la presenza di sorgenti all'interno della

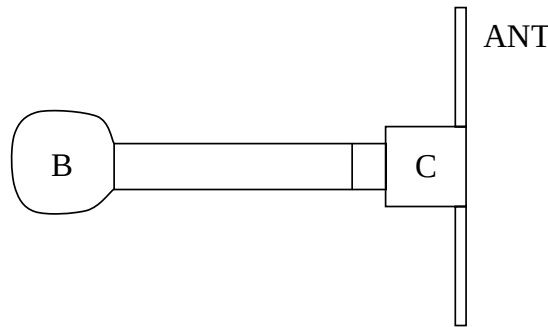


Figura 4.8. Schema di un dipolo con la struttura che lo alimenta.

superficie d'integrazione complica i conti, allora quest'ultima verrà scelta come mostrato in Fig. 4.9, dove Σ_c indica la superficie che circonda il conduttore (B) e il cavo coassiale, Σ_A è la regione di piano che collega il cavo coassiale con l'antenna e Σ_∞ è la superficie della sfera (vedi

anche particolare in Fig. 4.10). La sezione A indica la sezione della guida (cavo coassiale) che corrisponde all'ingresso dell'antenna. L'integrale di superficie della formula (4.36) si semplifica tenendo conto del fatto che gli integrali di superficie su Σ_c e Σ_∞ sono nulli in quanto si integra o su un conduttore o su una superficie che recede a infinito. Quindi l'integrale di superficie della (4.36) diventa

$$\int_{\Sigma_A} d\Sigma \hat{n} \cdot (\underline{E}_1(A) \times \underline{H}_2(A) - \underline{E}_2(A) \times \underline{H}_1(A)) \quad (4.52)$$

Supponendo che la sezione A sia sufficientemente distante dall'antenna in modo che nella guida (coassiale) sia presente solo il modo fondamentale si può affermare che

$$\underline{E}_t(A) = V_a \underline{e}(\rho) ; \quad \underline{H}_t(A) = I_A \underline{h}(\rho) \quad (4.53)$$

dove $\underline{e}(\rho)$ e $\underline{h}(\rho)$ sono le autofunzioni modali. Sostituendo, la (4.52) diventa

$$\int_{\Sigma_A} d^2\rho \hat{z} \cdot (\underline{e}(\rho) \times \underline{h}(\rho)) (V_{A1}I_{A2} - V_{A2}I_{A1}) \quad (4.54)$$

in cui il termine $(V_{A1}I_{A2} - V_{A2}I_{A1})$ non dipende da ρ e può essere portato fuori dall'integrale. Si ponga

$$\int_{\Sigma_A} d^2\rho \hat{z} \cdot (\underline{e}(\rho) \times \underline{h}(\rho)) = c \quad (4.55)$$

Analizzando il circuito concentrato nella sezione A corrispondente ad un'antenna in trasmissione, vedi Fig. 4.11, notiamo che

$$I_{A1} = I_{at} ; \quad V_{A1} = I_{A1}Z_a \quad (4.56)$$

mentre considerando un'antenna in ricezione (Fig. 4.12), abbiamo

$$V_a = \underline{h}_e^{(r)}(\hat{R}) \cdot \underline{E}_2^{inc}(\hat{R}) \quad (4.57)$$

Esprimendo il tutto in funzione di V_a otteniamo

$$I_{A2} = -\frac{V_a}{Z_g + Z_a} ; \quad V_{A2} = V_a \frac{Z_g}{Z_g + Z_a} \quad (4.58)$$

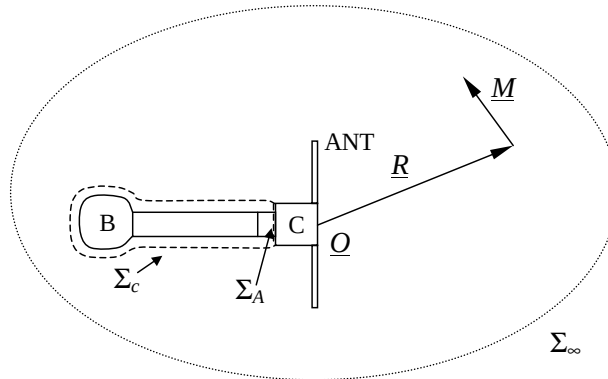


Figura 4.9. Visualizzazione della superficie di integrazione Σ .

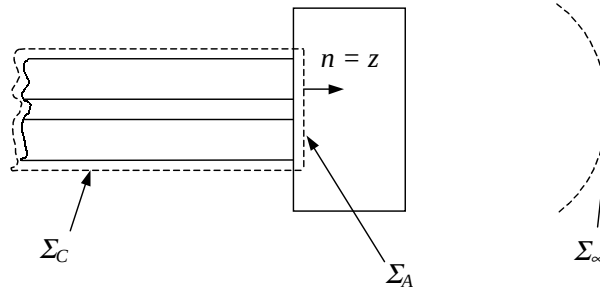


Figura 4.10. Particolare ingrandito del circuito di Fig. 4.9, con le superfici di integrazione.

Sostituendo le espressioni (4.56), (4.57), (4.58) e esplicitando il campo incidente come (vedi paragrafo 2.5.4)

$$\underline{E}_2^{inc}(\hat{R}) = -\frac{jZ_0}{2R\lambda} e^{-jkR} \underline{I}_{t\hat{R}} \cdot \underline{M} \quad (4.59)$$

la (4.54) diventa

$$-I_{at} \underline{h}_e^{(r)}(\hat{R}) \cdot \left[\frac{-jZ_0}{2R\lambda} e^{-jkR} \underline{I}_{t\hat{R}} \cdot \underline{M} \right] c \quad (4.60)$$

Per quanto riguarda gli integrali di volume della (4.36) (integrali di reazione), ricordiamo che le sorgenti $\underline{J}_{e1}$ e $\underline{J}_{m1}$ sono esterne al volume V (vedi Fig. 4.9), e quindi

$$\int_V d^3r \underline{J}_{e1} \cdot \underline{E}_2 = \int_V d^3r \underline{J}_{m1} \cdot \underline{H}_2 = 0 \quad (4.61)$$

mentre nel secondo termine $\underline{J}_{m2} = 0$, per scelta, e quindi

$$\int_V d^3r (-\underline{E}_1(r) \cdot \underline{J}_{e2}(r)) = -\underline{E}_1(R) \cdot \underline{M} = \frac{-jZ_0}{2R\lambda} e^{-jkR} \underline{h}_e^{(t)}(\hat{R}) I_{at} \cdot \underline{M} \quad (4.62)$$

Applicare il teorema della reciprocità in (4.36) corrisponde ora ad eguagliare la (4.60) con la (4.62), da cui ricaviamo

$$c \underline{h}_e^{(r)}(\hat{R}) \cdot \underline{I}_{t\hat{R}} \cdot \underline{M} = \underline{h}_e^{(t)}(\hat{R}) \cdot \underline{M} \quad (4.63)$$

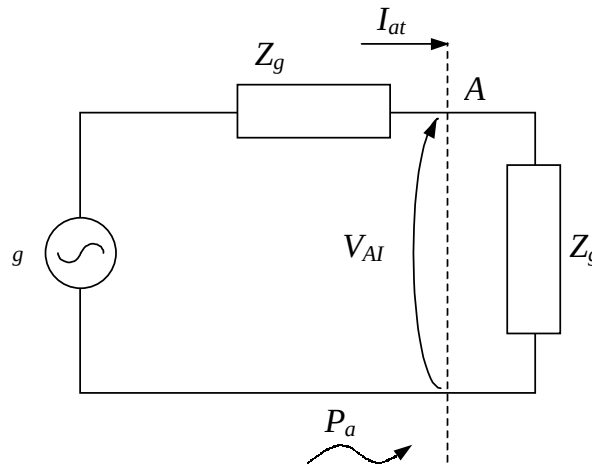


Figura 4.11. Circuito equivalente di un'antenna in trasmissione.

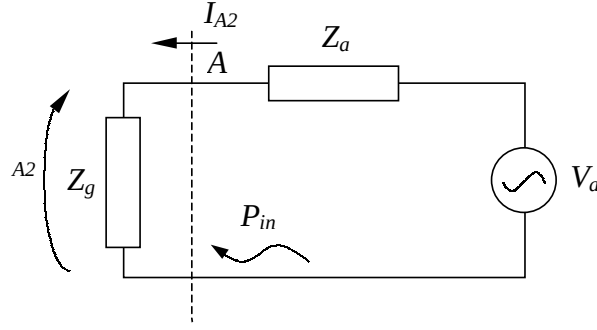


Figura 4.12. Circuito equivalente di un'antenna in ricezione.

Sapendo che il campo è trasverso a $\hat{R}$ si ha che

$$\underline{h}_e^{(r)}(\hat{R}) \cdot \underline{I}_{t\hat{R}} = \underline{h}_e^{(r)}(\hat{R}) \quad (4.64)$$

da cui

$$c \underline{h}_e^{(r)}(\hat{R}) \cdot \underline{M} = \underline{h}_e^{(t)}(\hat{R}) \cdot \underline{M} \quad (4.65)$$

ma quest'ultima relazione, poiché deve valere $\forall \underline{M}$ (che è arbitrario), equivale a

$$c \underline{h}_e^{(r)}(\hat{R}) = \underline{h}_e^{(t)}(\hat{R}) \quad (4.66)$$

Procediamo allora al calcolo di c . Sfruttando la definizione di potenza e ipotizzando $\underline{e}$ e $\underline{h}$ reali (cioè che non ci siano perdite) si ottiene

$$P_A = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \int_{\Sigma_A} d^2 \underline{\rho} \hat{z} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}^*) \right\} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ V_A I_A^* \int_{\Sigma_A} d^2 \underline{\rho} \hat{z} \cdot (\underline{e}(\underline{\rho}) \times \underline{h}(\underline{\rho})) \right\} \quad (4.67)$$

Ma poiché è noto che

$$P_A = \frac{1}{2} \text{Re} \{ V_A I_A^* \} \quad (4.68)$$

segue che

$$c = \int_{\Sigma_A} d^2 \underline{\rho} \hat{z} \cdot (\underline{e}(\underline{\rho}) \times \underline{h}(\underline{\rho})) = 1 \quad (4.69)$$

per cui la (4.66) diventa

$$\underline{h}_e^{(r)}(\hat{R}) = \underline{h}_e^{(t)}(\hat{R}) \quad (4.70)$$

Ciò vuol dire che

- l'antenna ha lo stesso diagramma d'irradiazione e di ricezione $|\underline{h}_e|^2$;
- le caratteristiche vettoriali di polarizzazione ($\hat{p} = \frac{\underline{h}_e}{|\underline{h}_e|}$) sono uguali sia in ricezione che in trasmissione.

Dato che per una stessa antenna è stato dimostrato che $\underline{h}_e^{(r)} = \underline{h}_e^{(t)}$, è evidente che $g(\hat{r})$ è in relazione con a_{eq} . Questa relazione può essere ottenuta a partire dalla espressione di $g(\hat{r})$

$$g(\hat{r}) = \pi \frac{Z_0}{R_a} \frac{|\underline{h}_e(\underline{r})|^2}{\lambda^2} \quad (4.71)$$

e dalla relazione (4.20),

$$a_{eq}(\hat{r}) = |\underline{h}_e|^2 \frac{Z_0}{4R_a} \quad (4.72)$$

Sostituendo la (4.72) nella (4.71), si ha che

$$g(\hat{r}) = \frac{4\pi}{\lambda^2} a_{eq}(\hat{r}) \quad (4.73)$$

5

Antenne filari

5.1 Introduzione alle antenne filari

Tutte le antenne che sono geometricamente individuabili mediante una o più linee si dicono *antenne filari* (per ragioni essenzialmente storiche). Il supporto di tali antenne, con alcune semplificazioni geometriche, può essere rappresentato come in Fig. 5.1. Le antenne filari sono

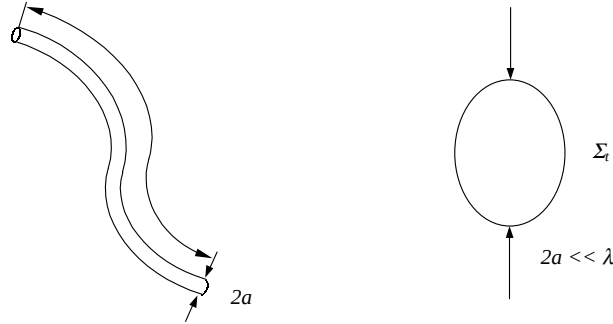


Figura 5.1. Supporto delle antenne filari.

caratterizzate da una sezione trasversale Σ_t di dimensioni molto minori della lunghezza d'onda λ (non si pongono vincoli sulla lunghezza del filo). Per queste antenne, supposte di materiale perfettamente conduttore, applichiamo il teorema di equivalenza, rimuovendo il metallo e lasciando al suo posto una corrente elettrica superficiale $\underline{J}_{es}$ sulla superficie del filo. La condizione al contorno sul conduttore ($\hat{n} \times \underline{E} = 0$) annulla la corrente magnetica (come intuitivo). Tuttavia è intuitivamente più semplice assumere la densità di corrente distribuita all'interno di tutto il filo, anziché solo sulla sua superficie, e questa è la strada che seguiremo. Vogliamo valutare l'espressione dell'integrale di irradiazione in campo lontano calcolando il vettore di irradiazione $\underline{P}_e$ che è funzione della trasformata di Fourier della densità di corrente elettrica

$$\tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \underline{J}_e(\underline{r}') e^{j k_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} \quad (5.1)$$

Data la geometria dell'antenna cercheremo di ridurre l'integrale di volume ad un integrale di linea, valutando come sempre quali approssimazioni ciò comporta e in quali condizioni valga. Cominciamo per semplicità a considerare il caso particolare di antenna filare rettilinea, prendendo in esame un filo rettilineo a sezione trasversale Σ_t costante, come mostrato in Fig. 5.2.

Se $\hat{\tau}$ indica la direzione lungo cui si estende il conduttore, il vettore $\underline{r}'$, che descrive i punti

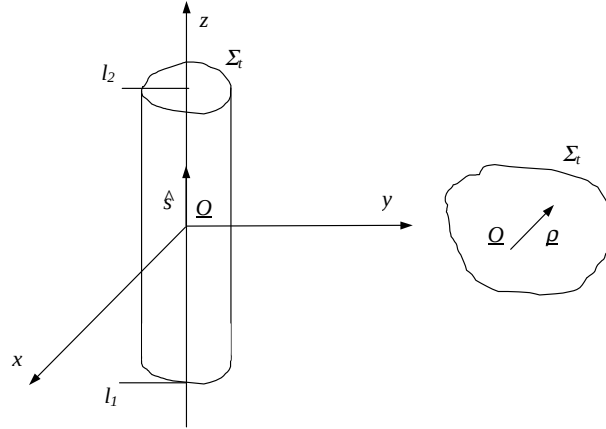


Figura 5.2. Filo rettilineo a sezione trasversale costante.

dell'antenna a partire dall'origine $\underline{Q}$ (supposta interna al filo), può essere scomposto in una componente longitudinale ed una trasversale rispetto a $\hat{\tau}$

$$\underline{r}' = s\hat{\tau} + \underline{\rho} \quad (5.2)$$

dove

- s è la coordinata curvilinea, cioè è la coordinata d'arco rispetto all'origine.
- $\underline{\rho}$ è la coordinata trasversale.

Utilizzando un sistema di riferimento cartesiano possiamo scrivere

$$\hat{\tau} = \hat{z} \quad ; \quad \underline{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y} \quad (5.3)$$

L'ipotesi di dimensioni trascurabili rispetto a λ impone una dimensione massima data da

$$a = \max_{\underline{\rho} \in \Sigma_t} |\underline{\rho}| \quad (5.4)$$

L'integrale di volume (5.1) può essere scomposto nella parte longitudinale e trasversale utilizzando la (5.2)

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{J}}_e(k_0\hat{r}) &= \int_{l_1}^{l_2} ds \int_{\Sigma_t} d^2\underline{\rho} \underline{J}_e(\underline{\rho}, s) e^{jk_0(\hat{r} \cdot \hat{\tau})s} e^{jk_0\hat{r} \cdot \underline{\rho}} = \\ &= \int_{l_1}^{l_2} ds e^{jk_0(\hat{r} \cdot \hat{\tau})s} \int_{\Sigma_t} d^2\underline{\rho} \underline{J}_e(\underline{\rho}, s) e^{jk_0\hat{r} \cdot \underline{\rho}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

In virtù della (5.4) è possibile eseguire la seguente approssimazione:

$$|k_0\hat{r} \cdot \underline{\rho}| \leq k_0a = 2\pi \frac{a}{\lambda_0} \ll 1 \quad (5.6)$$

ovvero

$$e^{jk_0\hat{r} \cdot \underline{\rho}} \simeq 1 \quad (5.7)$$

sostituendo nell'Eq. (5.5) otteniamo

$$\tilde{\mathcal{J}}_e(k_0 \hat{r}) \simeq \int_{l_1}^{l_2} ds e^{jk_0(\hat{r} \cdot \hat{\tau})s} \int_{\Sigma_t} d^2 \underline{\rho} \mathcal{J}_e(\underline{\rho}, s) \quad (5.8)$$

È ragionevole supporre che nell'integrale di superficie della (5.8) si possano trascurare i termini di sorgente ortogonali alla superficie esterna del filo. Possiamo quindi scrivere

$$\int_{\Sigma_t} d^2 \underline{\rho} \mathcal{J}_e(\underline{\rho}, s) \simeq \hat{\tau} \int_{\Sigma_t} d^2 \underline{\rho} \hat{\tau} \cdot \mathcal{J}_e(\underline{\rho}, s) = \hat{\tau} I(s) \quad (5.9)$$

essendo $I(s)$ la corrente che scorre nel filo avente la seguente forma:

$$I(s) = \int_{\Sigma_t} d^2 \underline{\rho} \hat{\tau} \cdot \mathcal{J}_e(\underline{\rho}, s) = \int_{\Sigma_t} d^2 \underline{\rho} \hat{n} \cdot \mathcal{J}_e(\underline{\rho}, s) \quad (5.10)$$

dove $\hat{n} = \hat{\tau}$ indica la normale alla superficie Σ_t .

Diamo ora una giustificazione dell'approssimazione adottata per l'integrale di superficie. Scomponiamo il termine di sorgente in una componente trasversale ed in una longitudinale rispetto alla direzione dell'antenna

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\parallel} + \mathcal{J}_{\perp} = J_{\parallel} \hat{\tau} + J_{\perp} \hat{u}_{\perp} \quad (5.11)$$

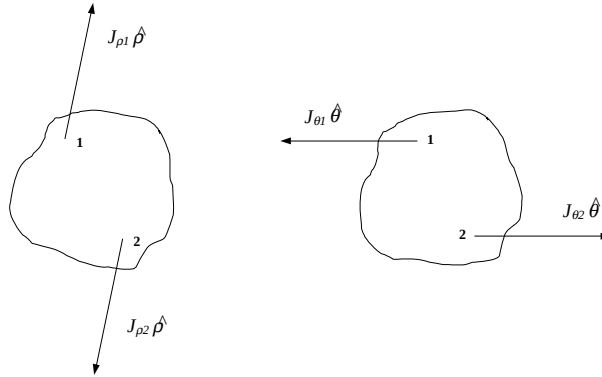


Figura 5.3. Sezione trasversale in coordinate polari.

Considerando la sezione trasversale nel sistema di coordinate polari otteniamo (vedi Fig. 5.3)

$$\mathcal{J}_{\perp} = J_{\rho} \hat{\rho} + J_{\theta} \hat{\theta} \quad (5.12)$$

È sufficiente utilizzare l'ipotesi $a \ll \lambda$ per poter affermare che dati due punti qualsiasi 1 e 2 di Σ_t avremo $J_{\rho 1} \simeq J_{\rho 2}$ e $\hat{\rho}_1 = -\hat{\rho}_2$. Da questo segue che

$$\int_{\Sigma_t} d^2 \underline{\rho} \hat{\tau} \cdot \mathcal{J}_{\rho}(\underline{\rho}, s) \simeq 0 \quad (5.13)$$

Analogamente possiamo dire che la componente J_{θ} è nulla. In base a queste ultime considerazioni scriviamo la (5.8) nella forma

$$\tilde{\mathcal{J}}_e(k_0 \hat{r}) \simeq \int_{l_1}^{l_2} ds \hat{\tau} I(s) e^{jk_0(\hat{r} \cdot \hat{\tau})s} \quad (5.14)$$

Cerchiamo ora di dare una forma più semplice alla $\tilde{\underline{J}}_e$. Abbiamo, dal momento che $\hat{\tau} \cdot \hat{r} = \cos \alpha$, che la (5.14) può essere riscritta come segue:

$$\tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) \simeq \int_{l_1}^{l_2} ds \hat{\tau} I(s) e^{jk_0 s \cos \alpha} \quad (5.15)$$

In altri termini se poniamo $\xi \equiv k_0 \cos \alpha$, l'espressione (5.15) diventa

$$\tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) \simeq \int_{l_1}^{l_2} ds \hat{\tau} I(s) e^{j\xi s} \quad (5.16)$$

che corrisponde alla trasformata di Fourier sul filo della corrente.

Prendiamo in esame un caso semplice $\hat{\tau} = \hat{z}$, $\alpha = \theta$

$$\underline{P}_e(\hat{r}) = \underline{I}_{\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) = (\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}) \cdot \hat{z} \int_{l_1}^{l_2} dz I(z) e^{jk_0 z \cos \theta} \quad (5.17)$$

Siccome

$$\hat{\theta} \cdot \hat{z} = -\sin \theta \quad ; \quad \hat{\phi} \cdot \hat{z} = 0 \quad (5.18)$$

otteniamo

$$\underline{P}_e(\hat{r}) = \hat{\theta}(-\sin \theta) \tilde{I}(\xi) \Big|_{\xi=k_0 \cos \theta} \quad (5.19)$$

che esprime il vettore di irradiazione di un'antenna filare disposta lungo $\hat{z}$ con origine sul filo, in funzione della trasformata di Fourier della distribuzione di corrente dell'antenna. Cerchiamo di interpretare i risultati ottenuti scrivendoli in modo più compatto: agli effetti del campo lontano l'espressione (5.14) esprime una sorgente concentrata lungo il filo, cioè

$$\underline{J}_e(\underline{r}) = \hat{\tau} I(s) \delta(\underline{\rho}) \quad (5.20)$$

dove $I(s)$ esprime la dipendenza longitudinale della sorgente e $\delta(\underline{\rho})$ campiona l'integrale in $\underline{\rho} = 0$ se, per semplicità, si considera l'origine sul filo. Se invece consideriamo la situazione generale

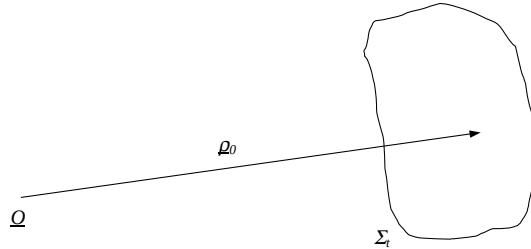


Figura 5.4. Riferimento con origine esterna alla sezione del filo.

con l'origine non sul filo possiamo scrivere la sorgente nella forma

$$\underline{J}_e(\underline{r}) \simeq \hat{\tau} I(s) \delta(\underline{\rho} - \underline{\rho}_0) = \hat{\tau} I(s) \delta(\underline{r} - \underline{r}_\gamma) \quad (5.21)$$

dove $\underline{r}_\gamma = \underline{\rho}_0 + s\hat{\tau}$ identifica l'equazione dell'asse del filo. Con l'estensione (5.21) è possibile affrontare il problema del filo rettilineo senza la limitazione dell'origine sul filo e considerando la corrente concentrata sull'asse del conduttore. In Fig. 5.5 abbiamo che

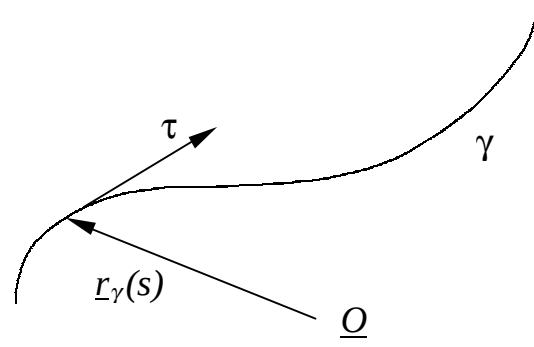


Figura 5.5. Configurazione generale di un'antenna filare.

- $\underline{r}_\gamma(s)$ è la funzione vettoriale che descrive i punti della curva.
- $\hat{\tau} = \hat{\tau}(s)$ versore tangente alla curva nel punto s .

Si ha

$$\underline{J}_e(\underline{r}) \simeq \hat{\tau}(s)I(s)\delta(\underline{r} - \underline{r}_\gamma(s)) \quad (5.22)$$

Si noti che $\delta(\underline{r} - \underline{r}_\gamma)$ ha dimensioni m^{-2} . La trasformata di Fourier di $\underline{J}_e$ in (5.8), che compare nel vettore di irradiazione in (5.17), si semplifica in

$$\tilde{\underline{J}}_e(k_0\hat{r}) = \int_{l_1}^{l_2} ds \hat{\tau}(s)I(s)e^{jk_0\hat{r}\cdot\underline{r}_\gamma(s)} \quad (5.23)$$

Quest'ultima espressione è la più generale possibile, poiché elimina la dipendenza dalla coordinata trasversale, vale per una qualsiasi curva descritta da $\underline{r}_\gamma$ e non dipende dalla scelta dell'origine. Un disegno esemplificativo della geometria è rappresentato in Fig. 5.6. La situazione in cui l'origine del sistema di coordinate è esterna al filo si presenta in molti casi di interesse pratico, nei quali una antenna è composta da più “filì” che irradiano. La scelta di

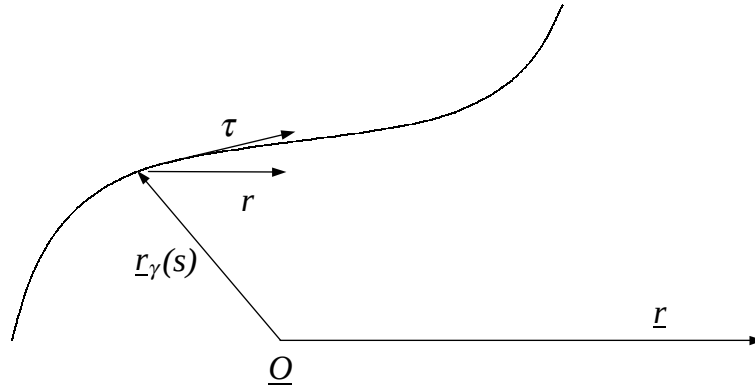


Figura 5.6. Disegno esemplificativo della configurazione generale

porre l'origine al di fuori dell'antenna non comporta alcun cambiamento nella forma del campo irradiato, ma introduce un termine di spostamento di fase. Consideriamo infatti l'esempio di un filo rettilineo parallelo all'asse $\hat{z}$, nel caso in cui l'origine delle coordinate non stia sul filo

stesso, come in Fig. 5.7. Chiamiamo $\underline{C}$ l'origine locale delle coordinate sul filo, identificata dal vettore $\underline{r}_C = \underline{C} - \underline{Q}$. Se chiamiamo s la coordinata lungo il filo, la posizione di un punto su di esso sarà data da $s\hat{z}$ a partire da $\underline{C}$, e da $\underline{r}_\gamma = \underline{r}_C + s\hat{z}$ a partire dall'origine $\underline{Q}$. L'esponentiale

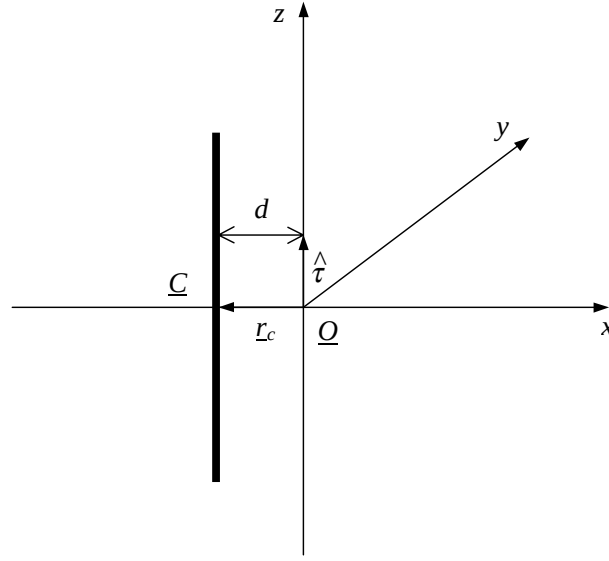


Figura 5.7. Filo rettilineo non centrato.

che compare nella (5.23) assume allora la forma

$$e^{jk_0\hat{r}\cdot\underline{r}_\gamma} = e^{jk_0\hat{r}\cdot\underline{r}_C} e^{jk_0(\hat{r}\cdot\hat{z})s} \quad (5.24)$$

quindi l'Eq. (5.23) può essere scritta nella forma seguente:

$$\tilde{\underline{J}}_e(k_0\hat{r}) = \hat{z} e^{jk_0\hat{r}\cdot\underline{r}_C} \int_{l_1}^{l_2} ds I(s) e^{jk_0s \cos \theta} \quad (5.25)$$

dove il termine $e^{jk_0\hat{r}\cdot\underline{r}_C}$ esprime lo spostamento di fase dovuto al fatto che l'origine non appartiene al filo. Nel caso più semplice in cui $\underline{r}_C = -d\hat{x}$ (come in Figg. 5.7 e 5.8) lo spostamento di fase è $jk_0\hat{r}\cdot\underline{r}_C = -jk_0d(\hat{r}\cdot\hat{x}) = -jk_0d \sin \theta \cos \phi$, da cui è evidente che il termine $\hat{r}\cdot\hat{x}d = d \sin \theta \cos \phi = w$ (vedi Fig. 5.8) è la differenza di fase di un'onda piana che “parte” da $\underline{C}$ rispetto a quella che parte da $\underline{Q}$ (ricordiamo che nel campo lontano le onde sferiche sono approssimabili da onde piane). È immediato verificare che nel dominio del tempo questi spostamenti di fase corrispondono a dei ritardi.

Consideriamo ora l'estensione al caso di un filo curvilineo, in tal caso, considerando la 5.14 e la 5.2 si perviene ad una espressione del tipo:

$$\tilde{\underline{J}}_e(k_0\hat{r}) \simeq \int_{s_1}^{s_2} ds \hat{s}(s) I(s) e^{jk_0(\hat{r}\cdot\hat{s})s} \quad (5.26)$$

Consideriamo ad esempio, il caso di un anello circolare di raggio $a \ll \lambda$, in queste condizioni si ha:

$$ds = a d\phi', \quad \hat{s} = \hat{\phi}'$$

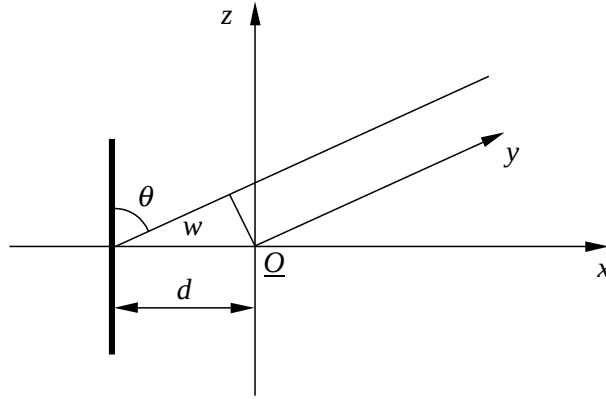


Figura 5.8. Spostamento di fase.

e pertanto la 5.26 diviene

$$\tilde{J}_e(k_0 \hat{r}) \simeq a \int_0^{2\pi} d\phi' \hat{\phi}' I(\phi') e^{jk_0(\hat{r} \cdot \hat{\phi}') a \phi'} \quad (5.27)$$

(attenzione a non confondere ϕ' con ϕ), in coordinate cartesiane risulta:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}' &= -\hat{x} \sin \phi' + \hat{y} \cos \phi' \\ \hat{\phi}' \cdot \hat{r} &= \sin \theta \sin(\phi - \phi') \end{aligned}$$

siccome $a \ll \lambda$, si approssima il termine esponenziale nella 5.27 come:

$$e^{jk_0(\hat{r} \cdot \hat{\phi}') a \phi'} \simeq 1 + jk_0(\hat{r} \cdot \hat{\phi}') a \phi' \quad (5.28)$$

5.2 Antenne a dipolo elettrico

Consideriamo un'antenna composta da due stili conduttori di opportuna lunghezza, distanziati di $\delta \ll \lambda$ ed alimentati da una linea di trasmissione, come in Fig. 5.9. Siccome $\delta \ll \lambda$, si suppone di poter considerare i morsetti dell'antenna come quelli di un componente elettrico concentrato e quindi di poter individuare una tensione V e una corrente I . La possibilità che scorra una corrente lungo gli stili, lasciati aperti come in Fig. 5.9 appare una evidente violazione della teoria dei circuiti a parametri concentrati (secondo cui la resistenza di ingresso è infinita), e dobbiamo cercare di dare una nuova interpretazione del fenomeno in esame sfruttando la teoria delle linee. Un modo per comprendere il problema è quello di studiare una struttura nota come linea di trasmissione biconica. Per studiare le caratteristiche di irradiazione di una tale antenna dovremo conoscere la forma $I(s)$ della corrente sui conduttori.

5.2.1 Linea di trasmissione biconica e dipolo a $\lambda/2$

La *linea biconica* è una struttura costituita di due coni conduttori di uguale apertura angolare affacciati alle punte, come si può vedere in Fig. 5.10. Si può studiare la linea biconica come guida d'onda, prendendo però come asse della guida la direzione radiale $\hat{r}$. Tale studio è al di là dei nostri scopi, ma si può mostrare¹ che tale guida, detta *sferica*, ammette un modo TEM,

¹per esempio in N.Marcuvitz, *Waveguide Hand Book*, Mc Graw-Hill, New York: 1951; Secs. 1.8 e 2.8.

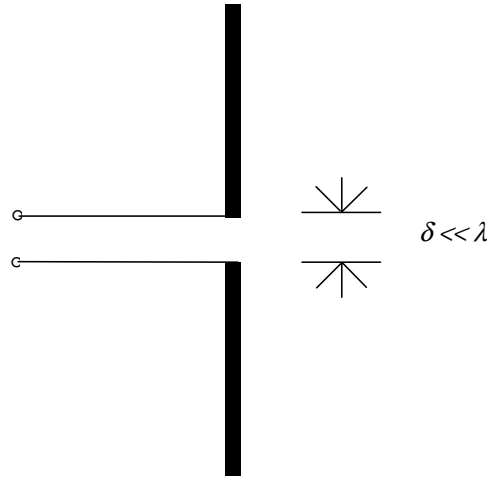


Figura 5.9. Antenna a dipolo elettrico.

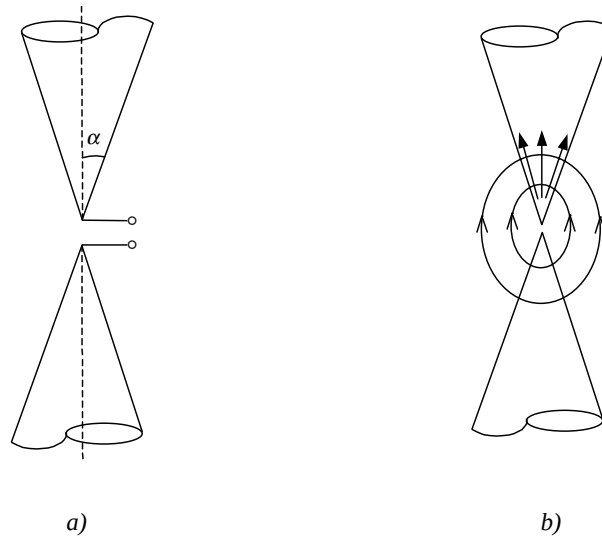


Figura 5.10. Linea biconica.

come intuibile dal fatto che questa struttura consente trasporto di potenza in continua e a bassa frequenza. La velocità di fase risulta essere c . Si possono quindi definire tensione V e corrente I nel senso sia modale che elettrotecnico, purché si considerino superfici a $r = \text{cost.}$ (così come nel coassiale si devono considerare superfici a $z = \text{cost.}$), come in Fig. 5.10.b; in generale $V = V(r)$, $I = I(r)$, ma sulla superficie del cono ovviamente $r = r(z)$ e $V = V(z)$, $I = I(z)$. Considerando le superfici a raggio costante possiamo dunque ricondurci all'equivalente linea di trasmissione (Fig. 5.11), dove possiamo individuare gli stati elettrici ad ogni sezione. Si noti che, contrariamente a quanto parrebbe intuitivo dalla Fig. 5.11a, la linea "c'è" solo per $z > 0$, in quanto i due conduttori nello schema equivalente in Fig. 5.11b corrispondono ognuno ad uno dei due coni della struttura biconica. Procedendo verso il nostro dipolo, supponiamo adesso di tagliare i due coni ad una distanza L dall'origine, ottenendo una transizione guida-spazio libero rappresentabile in prima approssimazione con una linea in circuito aperto a distanza L

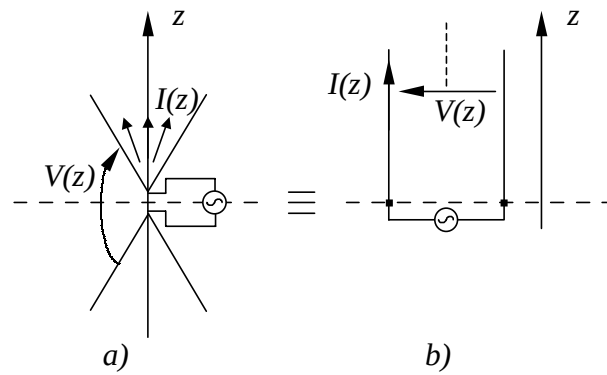


Figura 5.11. Circuito equivalente di un'antenna biconica infinita.

dal generatore, come in Fig. 5.12. A questo punto è sufficiente limitare lo studio a tale linea

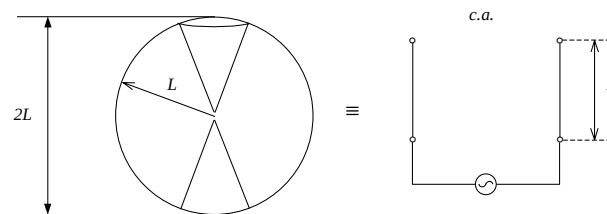


Figura 5.12. Circuito equivalente di una linea biconica finita.

di trasmissione. Calcoliamo il diagramma di onda stazionaria relativo alla corrente I noto lo stato elettrico della linea nella sezione $z = L$ (Fig. 5.13). L'espressione analitica della corrente

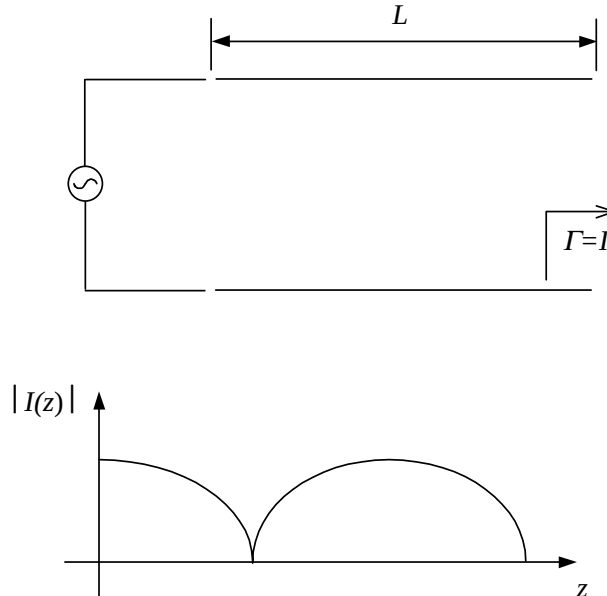


Figura 5.13. Diagramma di corrente per una linea biconica finita.

lungo la linea sarà dunque del tipo

$$I(r) = \cos t \cdot \cos(\beta r)$$

dove $\beta = k_0$. Per questa antenna siamo riusciti a dare una forma della corrente, anche se ovviamente la descrizione monomodale (TEM) del campo e la rappresentazione del cono tagliato come circuito aperto è approssimata e pertanto il diagramma d'onda stazionaria può essere considerato un'approssimazione ragionevole della corrente. Questa struttura biconica tagliata è detta *antenna biconica* ed è un'antenna relativamente a larga banda usata soprattutto come antenna di misura nel contesto delle misure di compatibilità elettromagnetica.

Cerchiamo ora di adattare i risultati ottenuti per l'antenna biconica al caso dello stilo conduttore. Se lo stilo è sottile, ed il rapporto tra il suo diametro $2a$ e la sua lunghezza l è $\ll 1$, è chiaro che non differisce molto da un cono sottile. Più accuratamente, il dipolo può essere visto come una linea biconica a sezione non costante: infatti ogni intervallo Δz del dipolo può essere localmente approssimato con un cono di opportuna apertura, come è mostrato in Fig. 5.14; l'equivalente in linea di trasmissione è rappresentabile con una serie di tratti di linea di impedenza caratteristica diversa, come mostrato in Fig. 5.15.

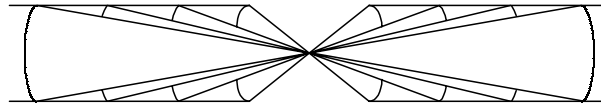


Figura 5.14. Approssimazione di uno stilo con una linea biconica.

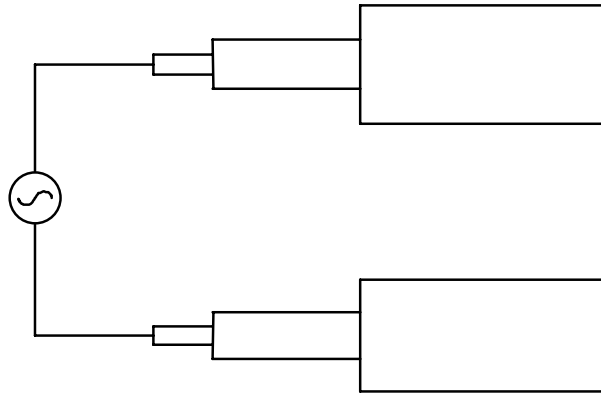


Figura 5.15. Equivalente di una linea biconica a sezione non costante.

Noi qui trascuriamo tale non uniformità, e quindi approssimiamo la distribuzione della corrente sul dipolo con un diagramma d'onda stazionaria, come in Fig. 5.16. La situazione più usata è quella per cui si ha il massimo valore di corrente in corrispondenza dell'alimentazione. Una situazione tipica è quella del *dipolo a $\lambda/2$* , o *dipolo a mezz'onda*, per cui $L = \lambda_0/2$, $l = \lambda_0/4$ (vedi Fig. 5.17). In base alle sole considerazioni fatte sinora, è chiaro che la reattanza all'ingresso è $X = 0$ ($\lambda_0/4$ da un circuito aperto); da quanto sappiamo dalla teoria delle risonanze sulle linee di trasmissione è evidente che in un circuito del tipo in Fig. 5.13 siamo in condizioni di risonanza. In base alla sola teoria approssimata, l'impedenza d'ingresso del dipolo sarà sempre reattiva: stiamo infatti trascurando gli effetti della *irradiazione*; vedremo più avanti questo aspetto (vedi paragrafo 5.2.2). Utilizzando la stessa geometria, ma cambiando la lunghezza in funzione di λ , possiamo ottenere distribuzioni diverse della corrente lungo l'antenna. In particolare, se scegliamo $l \ll \lambda$ la distribuzione della corrente lungo la linea di trasmissione

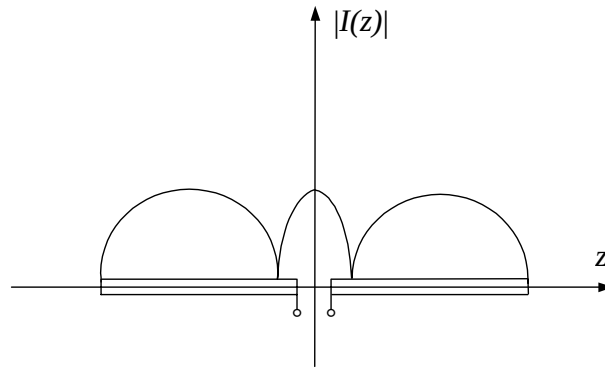
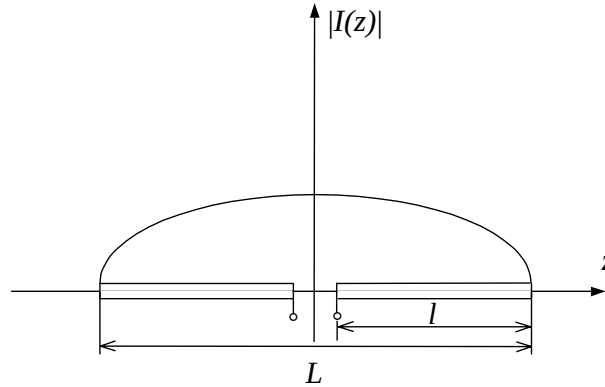


Figura 5.16. Diagramma d'onda stazionaria per un dipolo.

Figura 5.17. Distribuzione di corrente per un dipolo a $\frac{\lambda}{2}$.

è circa triangolare, come mostra la Fig. 5.18. Infatti il coseno si approssima con una retta ottenendo

$$I(z) \propto \cos(k_0 l) \simeq k_0 l \quad \text{se } k_0 l \ll 1 \quad (5.29)$$

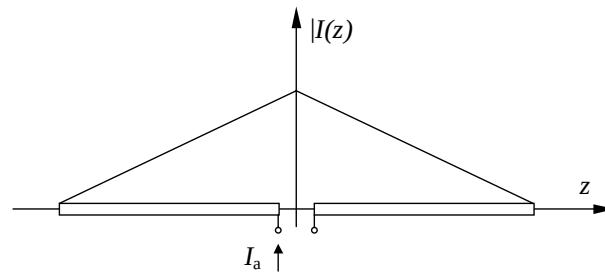


Figura 5.18. Distribuzione di corrente per un dipolo corto.

5.2.2 Dipolo corto e dipolo a $\lambda/2$: confronto

Il dipolo a $\lambda/2$ e quello corto sono i due tipi di dipolo più utilizzati nella pratica: vediamo dunque di mettere a confronto le prestazioni, premettendo che quello corto ha degli ovvi vantaggi di ingombro, supposto a frequenze “basse”.

Diagramma di irradiazione

Per una antenna rettilinea corta la trasformata della sorgente ha una forma semplice per via delle considerazioni in 2.6 e dalle equazioni (2.172) e (2.140), cioè

$$\tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) \simeq \underline{M}_e = \int dz \underline{J}_e = \hat{\tau} \int_{-l}^l ds I(s) \quad (5.30)$$

dove I_a è la corrente di alimentazione dell'antenna, $I(0) = I_a$ e quindi la (5.30) diventa ($L = 2l$)

$$\underline{M}_e = \hat{\tau} \int_{-l}^l ds I(s) = \frac{1}{2} \hat{\tau} L I_a \quad (5.31)$$

Questa è l'espressione del momento elettrico di un dipolo corto del tipo visto prima. In generale per un dipolo corto con una corrente $I(s) = I_a f(s)$ dove $|f(s)| < 1$ otteniamo il momento elettrico

$$\underline{M}_e = \hat{\tau} \int_{-l}^l ds I_a f(s) = \hat{\tau} I_a \int_{-l}^l ds f(s) \quad (5.32)$$

e, facendo il cambiamento di variabile $u = \frac{s}{2l}$, possiamo scrivere

$$\underline{M}_e = \hat{\tau} I_a L \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du f(u) = \hat{\tau} I_a L \nu \quad (5.33)$$

dove $\nu \equiv \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du f(u)$. Nel caso di dipolo corto visto prima (5.31), con distribuzione f triangolare, è chiaro che $\nu = \frac{1}{2}$, mentre se la corrente fosse costante ($f = \text{cost.}$) si avrebbe $\nu = 1$. Risulta chiaro che, essendo il campo irradato proporzionale a $\underline{M}_e$, l'intensità di tale campo dipende dall'intensità e dalla geometria della distribuzione di corrente (si deve cioè massimizzare l'integrale della corrente lungo il filo). Questa esigenza ha portato alla ricerca delle terminazioni più adatte per garantire una corrente costante nel filo (e di conseguenza $\nu = 1$). Per avere I costante lungo il filo dobbiamo "caricare" il dipolo alle estremità in modo reattivo, introducendo ad esempio un effetto capacitivo. Due esempi di realizzazione sono il *dipolo hertziano* e il *dipolo con terminazioni a piatto*, mostrati nelle Figg. 5.19 e 5.20. Le terminazioni consentono di ottenere una linea equivalente rappresentabile come in Fig. 5.21. La realizzazione pratica della seconda soluzione sfrutta spesso il terreno come uno specchio e una serie di fili tesi come terminazione a piatto, come schematizzato in Fig. 5.22.

Esaminiamo adesso più in dettaglio il dipolo a $\lambda/2$, che è una struttura molto usata nella pratica (vedi Fig. 5.18). L'espressione analitica della corrente risulta essere

$$I(z) = I_a \cos\left(\pi \frac{z}{2l}\right) = I_a \cos\left(\pi \frac{z}{L}\right) \quad (5.34)$$

Quindi prendendo l'origine al centro del dipolo e utilizzando la (5.23) otteniamo

$$\tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) = \hat{z} \int_{-l}^l dz I(z) e^{j\xi z} = \hat{z} I_a \int_{-l}^l dz \cos\left(\pi \frac{z}{L}\right) e^{j\xi z} \quad (5.35)$$

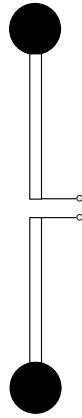


Figura 5.19. Dipolo hertziano.

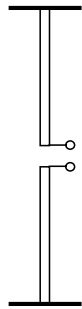


Figura 5.20. Dipolo con terminazioni a piatto.

dove $\xi = k_0 \cos \theta = k_0(\hat{z} \cdot \hat{r})$. Facendo il cambio di variabile $u = \frac{z}{L}$, $dz = Ldu$ l'espressione

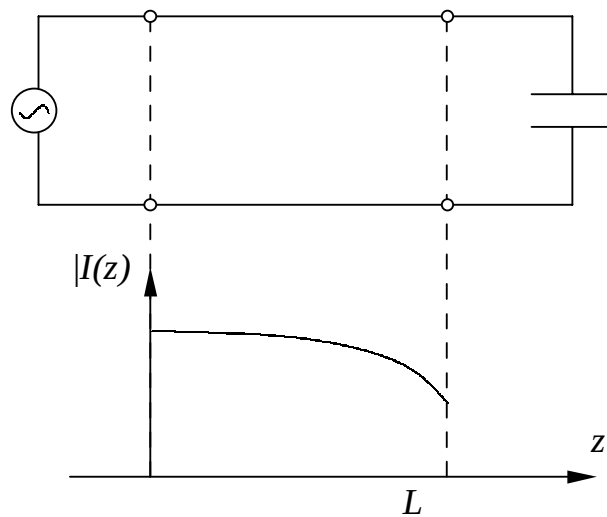


Figura 5.21. Linea equivalente di un dipolo con terminazioni.

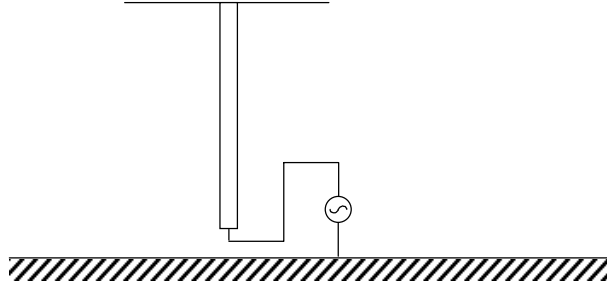


Figura 5.22. Configurazione pratica di un monopolo.

(5.35) può essere scritta come segue:

$$\tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) = \hat{z} I_a L \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du \cos(\pi u) e^{j\xi L u} \quad (5.36)$$

Se chiamiamo

$$F(\xi) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du \cos(\pi u) e^{j\xi L u}$$

l'Eq. (5.36) assume la forma

$$\tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) = \hat{z} I_a L F(\xi) \quad (5.37)$$

Possiamo esprimere il vettore di irradiazione elettrico come

$$\underline{P}_e(\hat{r}) = (\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) = \hat{\theta}(-\sin \theta) I_a L F(\xi) \quad (5.38)$$

Per un dipolo corto procedendo nello stesso modo otteniamo invece

$$\underline{P}_e(\hat{r}) = \hat{\theta}(-\sin \theta) I_a L \nu \quad (5.39)$$

Appare quindi evidente la differenza tra la (5.38) e la (5.39): mentre ν è un termine costante rispetto alla direzione, nel termine $F(\xi)$ del dipolo a $\lambda/2$ è contenuta la direttività dell'antenna. Calcoliamo dunque il termine $F(\xi)$

$$F(\xi) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du \cos(\pi u) e^{j\xi L u} \quad (5.40)$$

Se scriviamo $\cos(\pi u)$ come

$$\cos(\pi u) = \frac{1}{2} (e^{j\pi u} + e^{-j\pi u})$$

abbiamo

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du (e^{j\pi u} + e^{-j\pi u}) e^{j\xi L u} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du e^{j(\xi L + \pi)u} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du e^{j(\xi L - \pi)u} \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Calcoliamo separatamente i due integrali.

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du e^{j(\xi L + \pi)u} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du \Pi(u) e^{j(\xi L + \pi)u} \quad (5.42)$$

dove $\Pi(u)$ è la funzione porta di larghezza 1 centrata nello zero, cioè $\Pi(x) = -u(x - 1/2) + u(x + 1/2)$, ove $u(x)$ è il gradino unitario. Possiamo interpretare la (5.42) come la trasformata di Fourier della porta e quindi otteniamo

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du e^{j(\xi L + \pi)u} = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\pi \frac{\xi L + \pi}{2\pi}\right)}{\pi \frac{\xi L + \pi}{2\pi}} \quad (5.43)$$

e analogamente calcoliamo il secondo integrale

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du e^{j(\xi L - \pi)u} = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\pi \frac{\xi L - \pi}{2\pi}\right)}{\pi \frac{\xi L - \pi}{2\pi}} \quad (5.44)$$

Sostituendo infine i risultati (5.43) e (5.44) nell'Eq. (5.41) otteniamo

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \frac{\sin\left(\xi \frac{L}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{\xi L + \pi} + \frac{\sin\left(\xi \frac{L}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{\xi L - \pi} = \\ &= \frac{(\xi L - \pi) \sin\left(\xi \frac{L}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + (\xi L + \pi) \sin\left(\xi \frac{L}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{(\xi L)^2 - \pi^2} \end{aligned} \quad (5.45)$$

che, dopo opportune manipolazioni, risulta ridursi a

$$F(\xi) = \frac{-2\pi \cos\left(\xi \frac{L}{2}\right)}{(\xi L)^2 - \pi^2} \quad (5.46)$$

Guadagno e resistenza di irradiazione del dipolo corto

Calcoliamo il guadagno di un dipolo corto utilizzando la (3.7). Come abbiamo già visto in precedenza, dalla relazione di impedenza che soddisfa il campo irradiato possiamo scrivere

$$\frac{dP}{d\Sigma} = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_0} |\underline{E}|^2$$

e quindi

$$g(\hat{r}) = g(\theta) = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{Z_0} |\underline{E}|^2}{\frac{P_{al}}{4\pi r^2}} \quad (5.47)$$

Assumiamo $\eta = 1$ e quindi $P_{al} = P_{irr}$ (avremo come conseguenza che il guadagno risulterà uguale alla direttività dell'antenna). Ricaviamo la potenza irradiata come integrale di superficie della densità di potenza irradiata

$$P_{irr} = \int_{\Sigma} d\Sigma \frac{dP_{irr}}{d\Sigma} \quad (5.48)$$

dove

$$\frac{dP_{irr}}{d\Sigma} = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_0} |\underline{E}|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_0} \left(\frac{Z_0}{2r\lambda_0} \right)^2 |\underline{P}_e|^2 = \frac{1}{2} \frac{Z_0}{4r^2\lambda_0^2} |\underline{P}_e|^2 \quad (5.49)$$

possiamo assumere, senza perdere in generalità, che l'asse $\hat{z}$ sia lungo la direzione del dipolo, e quindi per un dipolo corto $\underline{P}_e(\hat{r}) = -\hat{\theta} \sin \theta M_e$, da cui

$$\frac{dP_{irr}}{d\Sigma} = \frac{1}{2} Z_0 \frac{M_e^2 \sin^2 \theta}{4r^2 \lambda_0^2} \quad (5.50)$$

Considerando come superficie d'integrazione una sfera possiamo esplicitare $d\Sigma$ in coordinate sferiche, cioè $d\Sigma = r^2 d\theta d\phi \sin \theta$. Dunque

$$\begin{aligned} P_{irr} &= r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{2} Z_0 \frac{M_e^2 \sin^2 \theta}{4r^2 \lambda_0^2} = \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \frac{M_e^2 Z_0}{4\lambda_0^2} \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \pi \frac{M_e^2 Z_0}{\lambda_0^2} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Sostituendo la (5.51) nella (5.47) otteniamo

$$g(\theta) = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \quad (5.52)$$

da cui $G = \frac{3}{2}$. Notiamo che il guadagno di un dipolo corto è indipendente dalla distribuzione di corrente, cioè da ν .

Possiamo calcolare la resistenza di irradiazione R_{irr} , essendo nota, a questo punto, la potenza irradiata P_{irr} . Sfruttando la relazione

$$P_{irr} = \frac{1}{2} R_{irr} |I_a|^2 \quad (5.53)$$

e la (5.51) abbiamo

$$\frac{1}{2} R_{irr} |I_a|^2 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \pi \frac{Z_0 M_e^2}{\lambda_0^2} = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \pi \frac{Z_0^2}{\lambda_0^2} |I_a|^2 L^2 \nu^2 \quad (5.54)$$

e quindi

$$R_{irr} = \frac{2}{3} \pi Z_0 \left(\frac{L}{\lambda_0} \right)^2 \nu^2 \quad (5.55)$$

Possiamo osservare che la resistenza d'irradiazione cresce al crescere delle dimensioni del dipolo (rispetto a λ), ed è sensibile alla distribuzione di corrente lungo lo stilo. Nel caso di $\nu = 1/2$ (distribuzione triangolare della corrente), ricordando che $Z_0 = 120\pi \Omega$, abbiamo

$$R_{irr} = \frac{2}{3} \pi 120 \pi \left(\frac{L}{\lambda_0} \right)^2 \frac{1}{4} = 20\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda_0} \right)^2 \quad (5.56)$$

Per avere un'idea dei valori numerici in gioco, consideriamo il caso tipico di $L = \frac{1}{10} \lambda_0$ (dipolo corto), ottenendo

$$R_{irr} \cong 2 \Omega \quad (5.57)$$

Un'antenna a dipolo corto ha una R_{irr} molto piccola, al punto da essere difficilmente distinguibile dalla resistenza di perdita: questo evidenzia che le antenne corte sono difficilmente utilizzabili.

Dipolo corto e lungo

Lo studio delle caratteristiche di guadagno e di direttività di un'antenna può essere fatto a partire dai diagrammi di irradiazione in forma polare. Tali diagrammi vengono realizzati a partire dal guadagno normalizzato dell'antenna, e costituiscono un valido strumento di paragone. Infatti confrontando i diagrammi di irradiazione di un dipolo corto e di un dipolo a $\lambda/2$ possiamo riscontrare un maggiore guadagno di quest'ultimo, come si può dedurre in Fig. 5.23 dalla minore apertura angolare del lobo. Il dipolo a $\lambda/2$, benché di poco, nella direzione di

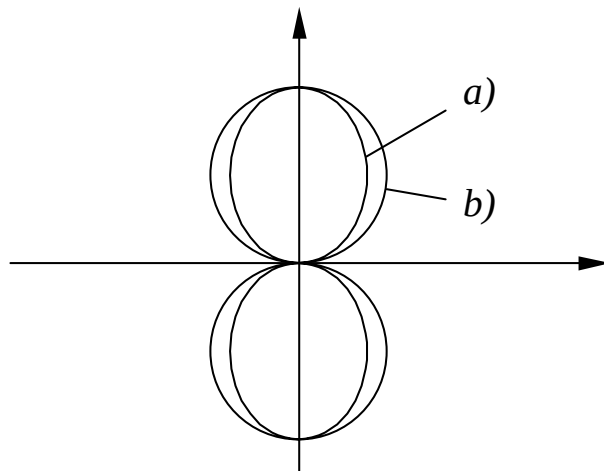


Figura 5.23. Diagrammi di irradiazione: a) dipolo a $\lambda/2$; b) dipolo Hertziano.

massima irradiazione (direzione perpendicolare al dipolo) produce un campo leggermente più elevato del dipolo corto. Le caratteristiche di tipo irradiativo sono comunque solo una parte delle caratteristiche dell'antenna: infatti la grande differenza tra il dipolo a $\lambda/2$ e il dipolo corto sta nella resistenza di irradiazione R_{irr} . Il dipolo a $\lambda/2$ risulta vantaggioso per l'elevato valore della resistenza d'irradiazione che si può calcolare² in $R_{irr} \simeq 73 \Omega$. Ciò comporta ovviamente una maggiore facilità di adattamento dell'antenna al circuito di alimentazione (generalmente realizzato in cavo coassiale con impedenza caratteristica $Z_\infty \simeq 75 \Omega$).

Nelle applicazioni reali si usano anche delle *antenne a monopolo*: sono antenne provviste di un solo stilo, alimentato rispetto ad un piano di massa come illustrato in Fig. 5.24. Sfruttando il teorema delle immagini possiamo studiare il monopolo come un normale dipolo (vedi Fig. 5.25). Per meglio comprenderne il comportamento di un dipolo, riportiamo i risultati relativi alla sua impedenza Z_a , validi nel caso di dipolo sottile. Tali curve sono il risultato di calcoli numerici che esulano dallo scopo di queste note; citiamo però il fatto che la parte resistiva si può ottenere per integrazione numerica dalla formula (3.38), che lega il campo irradiato alla resistenza di irradiazione.

In Figg. 5.26 e 5.27 sono rappresentati l'andamento della resistenza e della reattanza di un monopolo, da cui si ottengono quelle del dipolo moltiplicando per due. In ascissa è riportata la lunghezza elettrica $k_0 A = 2\pi A/\lambda$ dell'antenna in gradi ($2\pi = 360^\circ$). Le curve sono parametrizzate in funzione del *rapporto di snellezza* A/D (con A lunghezza, D dimensione trasversale). Si nota subito il comportamento risonante, ed esiste un valore di lunghezza elettrica che annulla

²Questo calcolo va fatto per via numerica, e si trova su tutti i testi di Antenne.

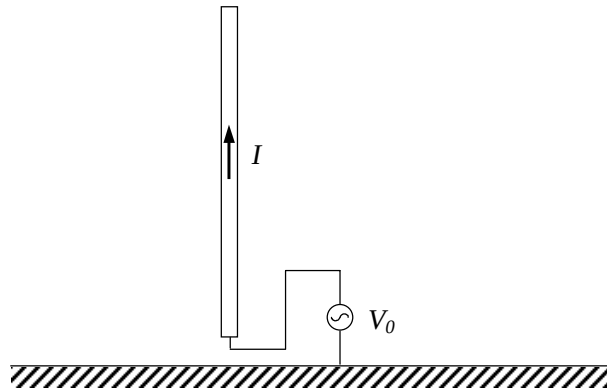


Figura 5.24. Monopolo con piano di massa.

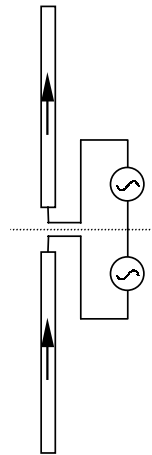


Figura 5.25. Configurazione equivalente di un monopolo con piano di massa.

la reattanza, per ogni valore di A/D ; si dovrà pertanto verificare tale condizione sul funzionamento dell'antenna. La risonanza è ottenuta per $l \simeq 0,47\lambda$ perché la terminazione aperta ha un effetto capacitivo. Si nota che la banda di utilizzo, banda in cui la reattanza assume valori

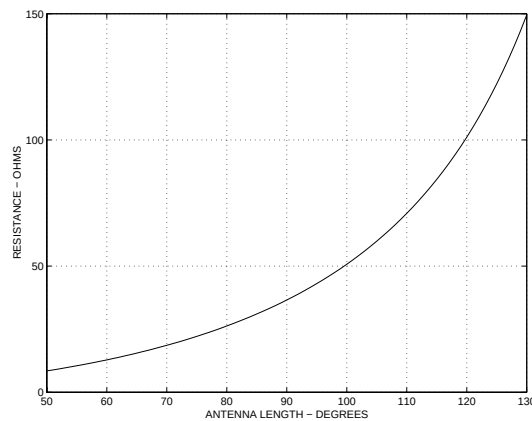


Figura 5.26. Resistenza di irradiazione di un monopolo, per snellezza costante, al variare della lunghezza elettrica.

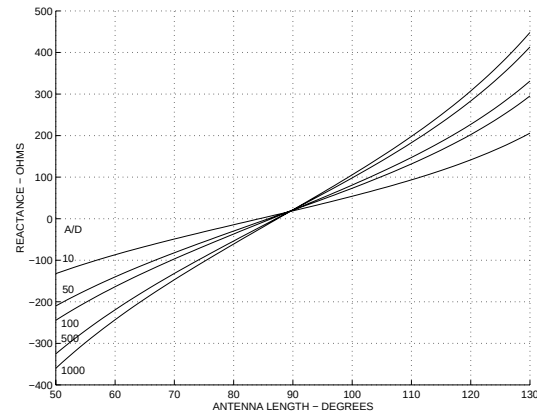


Figura 5.27. Reattanza di un monopolo, per snellezza costante, al variare della lunghezza elettrica.

bassi, è molto limitata attorno alla risonanza. In particolare, aumentando il rapporto A/D aumenta la pendenza della curva quindi diminuisce la banda di utilizzo.

6

Antenne ad apertura

6.1 Introduzione

Analizziamo ora una nuova classe di antenne per la quale si può individuare una regione interessata all'irradiazione che è tipicamente bidimensionale. Poiché tipicamente questa regione fa da tramite tra il “circuitto” (spesso in guida d'onda) e lo spazio libero, tali antenne sono dette *antenne ad apertura*. La determinazione delle correnti equivalenti sulla struttura dell'antenna è un problema che in generale richiede l'impiego di tecniche numeriche, oppure di opportune approssimazioni. Alcuni esempi tipici, di larga applicazione nella pratica, sono le antenne a tromba, a riflettore e a fessura.

a) *Antenna a tromba.*

È un'antenna in cui si “adatta” la guida allo spazio libero tramite la “svasatura” della

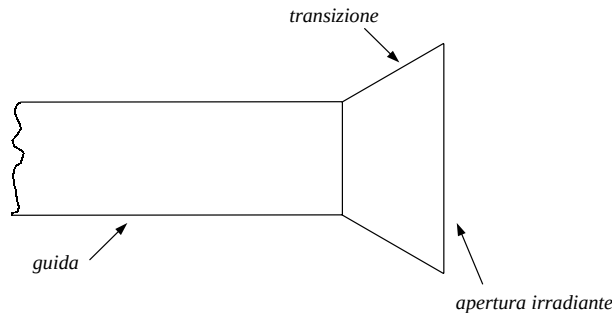


Figura 6.1. Rappresentazione schematica di una antenna a tromba.

guida che dà il nome a questa antenna. A stretto rigore, il campo irradiato è generato dalle correnti equivalenti su tutta la struttura, e non solo sull'apertura della tromba; tuttavia gli effetti irradiativi delle pareti laterali sono in genere assai meno importanti di quelli dell'apertura.

b) *Antenna a riflettore.*

Nella configurazione più semplice essa è composta da due elementi, l'*illuminatore* e il *riflettore* (vedi Fig. 6.2). L'illuminatore è tipicamente un'antenna a basso o moderato guadagno, spesso a tromba. Il regime in cui funziona quest'antenna è quello *quasi-ottico*,

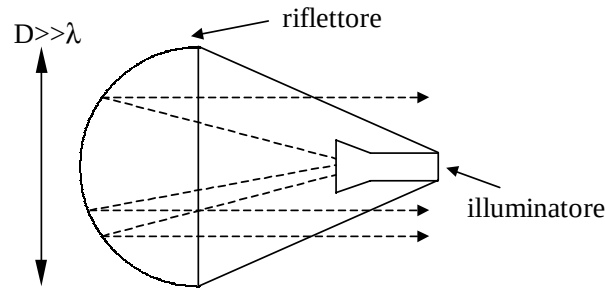


Figura 6.2. Esempio e schematizzazione del funzionamento di una antenna a riflettore (parabolico).

cioè il rapporto $\frac{D}{\lambda}$ è molto grande, e per l'analisi dell'andamento del campo elettromagnetico sul riflettore si possono usare approssimazioni di tipo raggistico, ovvero proprie della teoria dell'Ottica geometrica. Il principio base del funzionamento è quello delle analoghe strutture ottiche, per esempio di focalizzazione nella regione dell'illuminazione di un'onda piana incidente (pensandola in RX).

c) *Antenna a fessura.*

Questo tipo di antenna si realizza aprendo delle fessure su una guida d'onda che pertur-

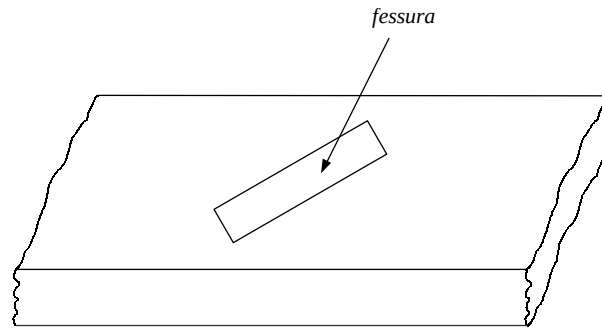


Figura 6.3. Rappresentazione schematica di una antenna a fessura.

bano le linee di corrente sulla guida stessa provocando così l'irradiazione. Si deve notare che non tutte le fessure hanno lo stesso effetto irradiativo; infatti aprendo delle fessure lungo la mezzzeria della struttura guidante (linea a fessura) è possibile studiare il campo all'interno della guida senza alterarla.

Lo studio dell'irradiazione si basa sul risultato del teorema di equivalenza. Quest'ultimo afferma che dato un volume chiuso delimitato da una superficie Σ , i campi presenti all'interno della struttura sono sostituibili con delle correnti equivalenti superficiali sulla frontiera Σ della struttura stessa. Per il momento supponiamo che i campi siano noti in qualche modo, e ci concentriamo sull'irradiazione in campo lontano. Applicando il teorema dell'equivalenza al volume V (vedi Fig. 6.4) si ottengono le correnti equivalenti superficiali, espresse come

$$\underline{J}_{es} = \hat{n} \times \underline{H}|_{\Sigma} \quad ; \quad \underline{J}_{ms} = -\hat{n} \times \underline{E}|_{\Sigma} \quad (6.1)$$

Notiamo che il volume V , con tutto ciò che contiene, è stato rimosso, e al suo posto è stato messo lo stesso mezzo esistente all'esterno. In questa maniera ci siamo ricondotti al calcolo

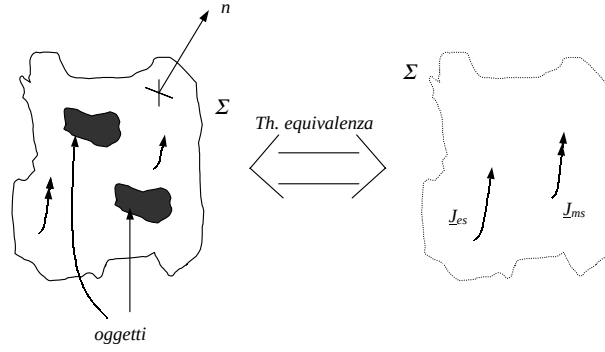


Figura 6.4. Applicazione del teorema di equivalenza ad un generico volume V .

dell'irradiazione in spazio libero, descrivibile mediante la diade $\underline{\underline{G}}$. Vediamo ora alcuni esempi di applicazione.

- Conduttore elettrico perfetto (PEC).

Usando il teorema di equivalenza si rimuovono i conduttori e si calcolano le correnti sulla superficie. Le condizioni al contorno per un conduttore perfetto stabiliscono che $\hat{n} \times \underline{E}|_{\Sigma} = 0$. Si ha allora $\underline{J}_{ms} = 0$ e $\underline{J}_{es} = \hat{n} \times \underline{H}|_{\Sigma}$ su una qualunque superficie metallica “rimossa”.

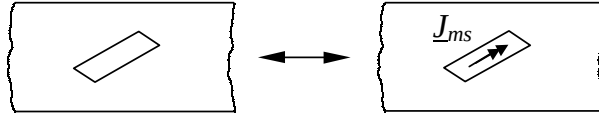


Figura 6.5. Applicazione del teorema di equivalenza ad una antenna a fessura.

Per ogni antenna con parti metalliche, le $\underline{J}_e$ sono correnti equivalenti, cioè campi, e quindi non contano nel teorema di reciprocità, in quanto generatori pilotati.

- Antenna a fessura. Questo caso è il duale del precedente; infatti applicando il teorema di equivalenza si “rimuove” la fessura sostituendola con il metallo. In questo caso, applicando il teorema delle immagini (vedi Fig. 6.5), la $\underline{J}_{es}$ è nulla e quindi sulla superficie metallica sono presenti solo le correnti magnetiche $\underline{J}_{ms}$. Questo discorso vale esattamente se la superficie metallica è infinita. In generale questo non accade, ma si può lo stesso mostrare che $\underline{J}_{es} = 0$ nel problema equivalente in cui si chiude la fessura con il metallo.

- Antenna a riflettore.

Usualmente illuminatore e riflettore vengono considerati separatamente in quanto quest'ultimo può essere considerato in campo lontano per l'illuminatore. Per i calcoli, esatti o approssimati, si hanno tipicamente due possibilità: o si applica il teorema di equivalenza rimuovendo così la superficie del riflettore ed avendo correnti solo elettriche $\underline{J}_{es}$ o, senza togliere il metallo, si considera un piano infinito e si considerano le $\underline{J}_{es}$ e $\underline{J}_{ms}$ sulla superficie stessa (vedi Fig. 6.6).

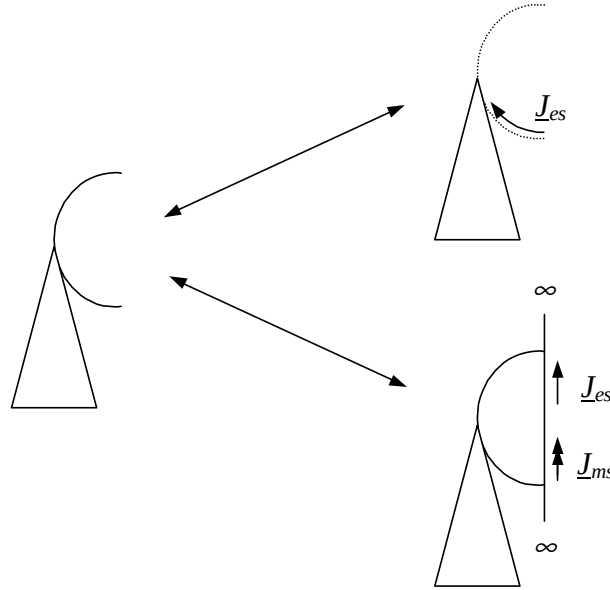


Figura 6.6. Possibili equivalenze per lo studio di una antenna a riflettore.

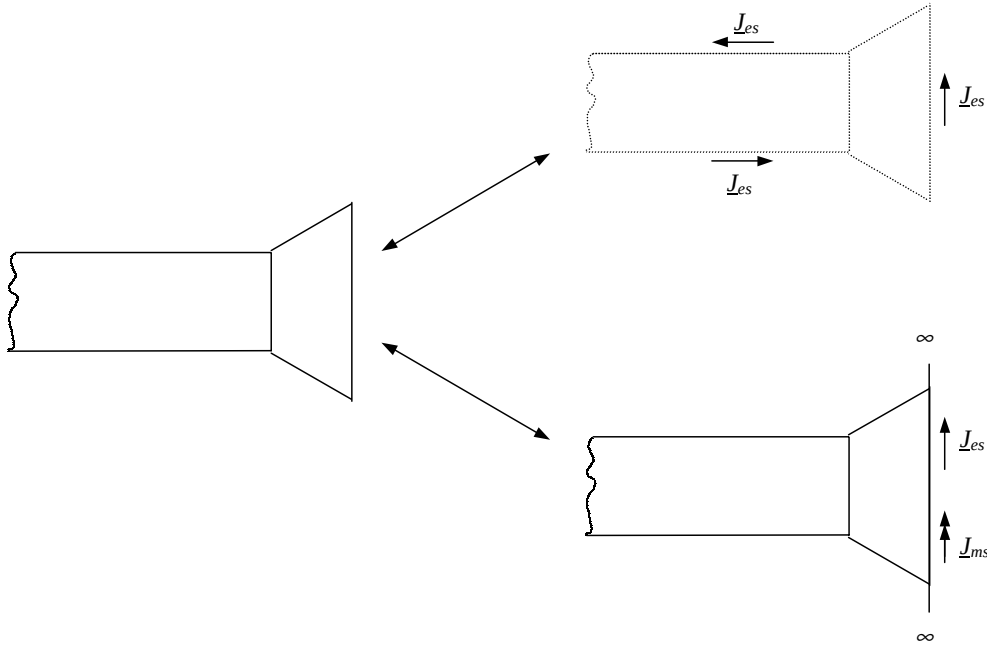


Figura 6.7. Possibili equivalenze per lo studio di una antenna a tromba.

- Antenna a tromba.

Per le correnti equivalenti si possono utilizzare entrambi i metodi visti per il riflettore. Si può cioè considerare una superficie Σ che racchiude l'intera struttura e su essa considerare le $\underline{J}_{es}$ e $\underline{J}_{ms}$, tenendo presente che le $\underline{J}_{ms}$ non sono nulle solo sulla superficie "irradiante". In alternativa si può usare un piano infinito appoggiato alla bocca dell'antenna, come superficie per l'applicazione del teorema di equivalenza. In tal caso i risultati ottenuti saranno ovviamente validi solo per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ (vedi Fig. 6.7), che è la regione esterna.

6.2 Irradiazione da apertura

Si procede al calcolo delle trasformate $\tilde{\underline{J}}_e(\underline{r})$ e $\tilde{\underline{J}}_m(\underline{r})$, che compaiono nell'espressione del campo (lontano) irradiato. Indicando l'equazione della superficie Σ con $\underline{r}_\Sigma = \underline{r}(u, v)$ e usando il pedice α al posto di e, m si può scrivere

$$\begin{aligned}\underline{J}_e(\underline{r}) &= \underline{J}_{es}(u, v) \delta(\underline{r} - \underline{r}_\Sigma) \\ \underline{J}_m(\underline{r}) &= \underline{J}_{ms}(u, v) \delta(\underline{r} - \underline{r}_\Sigma)\end{aligned}\quad (6.2)$$

dove $\delta(\underline{r} - \underline{r}_\Sigma)$ indica una delta di superficie, definita implicitamente dalla relazione

$$\int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{r} \delta(\underline{r} - \underline{r}_\Sigma) \underline{A}(\underline{r}) = \int_{\Sigma} d\Sigma \underline{A}(\underline{r}_\Sigma) \quad (6.3)$$

(ricordiamo che $\underline{J}_{es}$ e $\underline{J}_{ms}$ hanno dimensioni di $A m^{-1}$ e $V m^{-1}$ rispettivamente). Passando nel dominio trasformato

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{J}}_\alpha(\underline{k}) &= \int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{r} e^{(j\underline{k} \cdot \underline{r})} \underline{J}_\alpha(\underline{r}) = \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{r} e^{(j\underline{k} \cdot \underline{r})} \underline{J}_{\alpha s}(u, v) \cdot \delta(\underline{r} - \underline{r}_\Sigma) = \\ &= \int_{\Sigma} d\Sigma e^{(j\underline{k} \cdot \underline{r}_\Sigma)} \underline{J}_{\alpha s}(u, v)\end{aligned}\quad (6.4)$$

Nel caso piano, in cui Σ sta nel piano (x, y) (vedi Fig. 6.8), la (6.4) si semplifica in

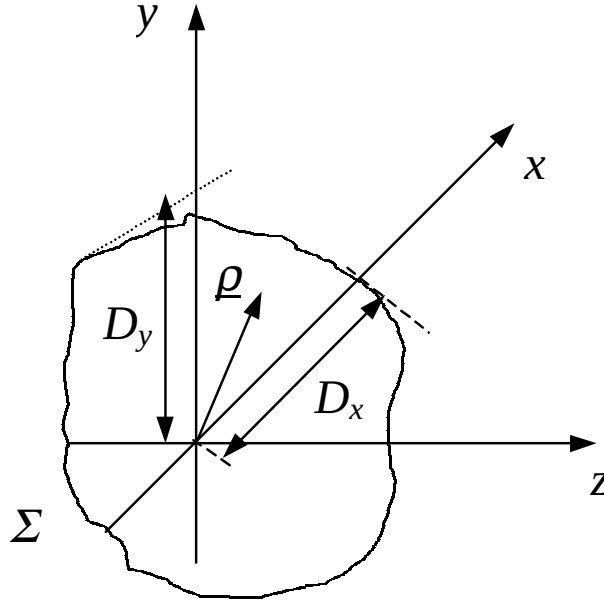


Figura 6.8. Rappresentazione del sistema di riferimento relativo ad una generica superficie piana Σ .

$$\tilde{\underline{J}}_\alpha(\underline{k}) = \int d^2\underline{\rho} e^{(j\underline{k} \cdot \underline{\rho})} \underline{J}_{\alpha s}(\underline{\rho}) \quad (6.5)$$

dove, al solito, $\underline{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$; particolarizzando a $\underline{k} = k_0\hat{r}$ si ha

$$\tilde{\underline{J}}_{\alpha}(k_0\hat{r}) = \int_{\Sigma} dx dy e^{j k_0\hat{r} \cdot (x\hat{x} + y\hat{y})} \underline{J}_{\alpha s}(x, y) \quad (6.6)$$

Esplicitando in coordinate sferiche, e ponendo

$$\begin{aligned} k_0\hat{r} \cdot \hat{x} &= k_0 \sin(\theta) \cos(\phi) = \xi \\ k_0\hat{r} \cdot \hat{y} &= k_0 \sin(\theta) \sin(\phi) = \eta \end{aligned} \quad (6.7)$$

abbiamo

$$\tilde{\underline{J}}_{\alpha}(k_0\hat{r}) = \iint dy dx e^{j(x\xi + y\eta)} \underline{J}_{\alpha s}(x, y) \quad (6.8)$$

Quest'ultima espressione è evidentemente la trasformata di Fourier bidimensionale del campo di apertura (ricordiamo che $\underline{J}_{es} = \hat{n} \times \underline{H}$ e $\underline{J}_{ms} = -\hat{n} \times \underline{E}$).

Questo ci permette di stabilire importanti relazioni tra la forma della distribuzione di apertura e la proprietà del campo irradiato, proprio utilizzando le proprietà generali note della trasformata di Fourier. Tali relazioni, anche quando qualitative, costituiscono delle linee-guida nella fase di progetto, o di scelta, di una antenna.

In primo luogo, è chiaro che se il supporto spaziale Σ è “largo”, allora il supporto trasformato (“banda”) sarà “stretto” (si pensi per esempio alla sinc come trasformata di una porta, ed alla relazione tra il primo zero della sinc e l'ampiezza della porta). Ne segue che un'antenna “grande” avrà un diagramma di irradiazione con un lobo principale stretto, cioè sarà direttiva, e viceversa.

Per evidenziare meglio tale proprietà cerchiamo di separare, nella (6.8), la dipendenza della *forma* della distribuzione di apertura dalle *dimensioni fisiche* dell'apertura stessa; definiamo quindi innanzitutto delle variabili normalizzate

$$q_x = \frac{x}{D_x}, \quad D_x = \max_{x \in \Sigma} |x|, \quad |q_x| \leq 1 \quad (6.9)$$

$$q_y = \frac{y}{D_y}, \quad D_y = \max_{y \in \Sigma} |y|, \quad |q_y| \leq 1 \quad (6.10)$$

e chiamiamo $\hat{\Sigma}$ la superficie Σ descritta in tali variabili, cioè formalmente

$$\hat{\Sigma} = \{(q_x, q_y) : (x, y) \in \Sigma\} \quad (6.11)$$

Per evidenziare la forma della $\underline{J}_s$ sull'apertura (omettiamo per brevità il pedice α), diciamo che

$$\underline{J}_s(D_x q_x, D_y q_y) = \underline{j}_s(q_x, q_y) \quad (6.12)$$

In questo modo, se dilatiamo la superficie Σ senza alterare la forma della distribuzione di apertura, $\underline{j}_s(q_x, q_y)$ resta invariata, e variano solo le dimensioni D_x e D_y di Σ . Benché non indispensabile ai fini di quello di cui stiamo discutendo ora, è conveniente anche estrarre l'ampiezza del campo di apertura, che è proporzionale alla potenza di alimentazione dell'antenna; poniamo

$$J_0 = \frac{\iint_{\Sigma} d^2 \underline{\rho} \tilde{\underline{J}}_s}{A} \quad (6.13)$$

dove $A = \iint_{\Sigma} d^2 \underline{\rho}$, e scriviamo

$$\tilde{\underline{J}}_s(x, y) = J_0 \underline{f}(q_x, q_y) \quad (6.14)$$

Abbiamo allora che la (6.6) diventa

$$\tilde{\underline{J}}_s(k_0 \hat{r}) = D_x D_y J_0 \iint_{\hat{\Sigma}} dq_x dq_y e^{(jk_0 D_x \sin \theta \cos \phi q_x + jk_0 D_y \sin \theta \sin \phi q_y)} \underline{f}(q_x, q_y) \quad (6.15)$$

ovvero

$$\tilde{\underline{J}}_s(k_0 \hat{r}) = D_x D_y J_0 \tilde{\underline{f}}(u, v) \quad (6.16)$$

con $u = k_0 D_x \sin \theta \cos \phi$, $v = k_0 D_y \sin \theta \sin \phi$. È ora chiaro che le proprietà di direttività dell'antenna, legate alla forma del campo irradiato come funzione di θ e ϕ , dipendono dalla forma $\underline{f}$ della distribuzione di apertura, e dipendono dalle dimensioni dell'apertura D_x e D_y *esclusivamente* tramite i prodotti $k_0 D_x = 2\pi \frac{D_x}{\lambda}$ e $k_0 D_y = 2\pi \frac{D_y}{\lambda}$. Ancora una volta, “grande” e “piccolo” per le proprietà irradieative si riferiscono al confronto con la lunghezza d'onda λ .

Un'altra importante osservazione è legata alla regolarità ed alla forma intrinsecamente oscillante delle trasformate $\tilde{\underline{J}}_s$; per semplicità è bene considerare il caso semplice (e importante) in cui Σ_a ed il campo di apertura siano separabili in coordinate cartesiane, trattato più nel dettaglio in precedenza, in modo da poter considerare la nota trasformata di Fourier unidimensionale. Poiché tutte le antenne hanno ovviamente dimensioni finite, le correnti hanno supporto limitato; di conseguenza le trasformate (che possono essere viste come convoluzione con la trasformata di una porta, cioè una sinc) avranno un andamento tipicamente oscillante in ξ e η (o u e v). Dato che però ξ e η , o u e v in (6.7), sono legate alle coordinate fisiche θ e ϕ da funzioni sin e cos, è evidente che tutto lo spazio ($\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$) corrisponde ad un intervallo limitato in u , v ; pertanto il diagramma di irradiazione non avrà infinite oscillazioni. In particolare, nel nostro caso di $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (vedi paragrafo 6.2) abbiamo

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \phi \in [0, 2\pi] \longleftrightarrow u \in [-k_0 D_x, k_0 D_x], v \in [-k_0 D_y, k_0 D_x] \quad (6.17)$$

e quindi, fissata la forma del campo di apertura, e cioè l'espressione di $\underline{f}$ e $\tilde{\underline{f}}$, ci saranno tante più oscillazioni nel diagramma di irradiazione (in θ e ϕ) quanto più grande sarà l'apertura (cioè $\frac{D_x}{\lambda}$ e $\frac{D_y}{\lambda}$). Inoltre, avendo i campi di apertura supporto limitato, le loro trasformate non avranno singolarità al finito.

Come già detto in diverse occasioni, il calcolo delle correnti superficiali costituisce la parte più difficile del problema, che noi eviteremo cercando una forma approssimata del campo sull'apertura. In primo luogo, benché si richiedano i campi su tutto il piano (x, y) , poiché la tromba è formata da superfici metalliche, i campi possono essere considerati confinati sull'apertura Σ_a , cioè

$$\iint_{\mathbf{R}^2} d^2 \underline{\rho}(\dots) \simeq \iint_{\Sigma_a} d^2 \underline{\rho}(\dots) \quad (6.18)$$

Per quel che riguarda la forma dei campi su Σ_a , notiamo che il principio di funzionamento su cui si basa questo tipo di antenna è l'“adattamento” tra la guida e lo spazio libero. In virtù di ciò, possiamo assumere che, nella guida di accesso, il coefficiente di riflessione Γ_a dell'antenna sia trascurabile per il modo considerato (che spesso è quello fondamentale della guida, anche

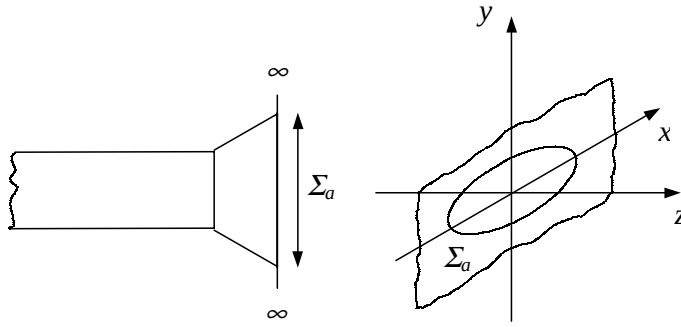


Figura 6.9. Sistema di riferimento per l'irradiazione di una antenna a tromba.

se non sempre). Questa assunzione è assai ben verificata per trombe con angoli di apertura non troppo grandi (per esempio $\leq 45^\circ$, con coefficiente di riflessione misurati al di sotto di -20 dB. Ovviamente, l'antenna è comunque una discontinuità, e quanto sopra vale a distanza dalla transizione guida-antenna sufficiente a far decadere i modi sottotaglio in guida; indicheremo con B tale sezione, che considereremo la sezione d'ingresso dell'antenna ai fini dei nostri calcoli.

Inoltre, nella regione di transizione, si può supporre che il campo mantenga la stessa forma, cioè la stessa dipendenza funzionale da x e da y che aveva in guida. Se nella sezione B della guida scriviamo il campo come

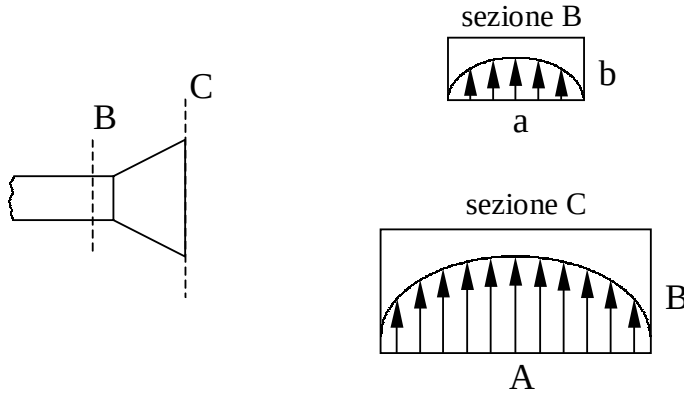


Figura 6.10. Forma del campo elettrico nelle sezioni B e C di una antenna a tromba (rettangolare, nell'esempio).

$$\underline{E}_t = V_0 \cdot \underline{e} \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right) \quad (6.19)$$

Sull'apertura, cioè nella sezione C (vedi Fig. 6.10), avremo cioè

$$\underline{E}_t = V_1 \cdot \underline{e} \left(\frac{x}{A}, \frac{y}{B} \right) \quad (6.20)$$

Un'altra approssimazione non strettamente necessaria, ma che si fa spesso per semplificare i calcoli, è che sulla superficie di apertura Σ_a valga la stessa relazione d'impedenza che vale in spazio libero; indicando cioè con $\underline{E}_a$ ed $\underline{H}_a$ i campi sull'apertura, assumiamo che:

$$\underline{E}_a = -(\hat{z} \times \underline{H}_a) Z_0 \quad (6.21)$$

(avendo supposto $\Gamma_a = 0$, nella guida vale ancora una relazione di impedenza analoga, ma con l'impedenza caratteristica del modo in luogo di Z_0). Su Σ_a , dove $\hat{n} = \hat{z}$, le densità di corrente superficiale sono allora

$$\underline{J}_{ms} = -\hat{z} \times \underline{E}_a = -\hat{z} \times \underline{E}_{at} \quad (6.22)$$

$$\underline{J}_{es} = +\hat{z} \times \underline{H}_a = +\hat{z} \times \underline{H}_{at} \quad (6.23)$$

che, usando la relazione d'impedenza (6.21), risultano entrambe funzioni di un solo campo (in ciò semplificando i calcoli)

$$\underline{J}_{es} = +\hat{z} \times \underline{H}_a = +\hat{z} \times (-\hat{z} \times \underline{E}_{at}) \frac{1}{Z_0} = -\frac{1}{Z_0} \underline{E}_{at}. \quad (6.24)$$

Calcolando ora la trasformata di Fourier (6.8) con le espressioni (6.22) e (6.24) si ha in generale che

$$\tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) = -\frac{1}{Z_0} \tilde{\underline{E}}_{at} = -\frac{1}{Z_0} \int_{\Sigma_A} d^2 \underline{\rho} \underline{E}_{at}(\underline{\rho}) e^{j(k_0 \hat{r} \cdot \underline{\rho})} \quad (6.25)$$

$$\tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) = -\hat{z} \times \tilde{\underline{E}}_{at} = -\hat{z} \times \int_{\Sigma_A} d^2 \underline{\rho} \underline{E}_{at}(\underline{\rho}) e^{j(k_0 \hat{r} \cdot \underline{\rho})} \quad (6.26)$$

Il vettore di irradiazione di conseguenza si può scrivere come

$$\begin{aligned} \underline{P}_e(\hat{r}) &= \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0 \hat{r}) - \frac{1}{Z_0} (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0 \hat{r}) = \\ &= -\frac{1}{Z_0} \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{E}}_{at} - \frac{1}{Z_0} (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot (-\hat{z} \times \tilde{\underline{E}}_{at}) = \\ &= -\frac{1}{Z_0} \left\{ (\underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{E}}_{at}) + (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot (-\hat{z} \times \tilde{\underline{E}}_{at}) \right\} = \\ &= -\frac{1}{Z_0} \left\{ \underline{I}_{t\hat{r}} - (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot (\hat{z} \times \underline{I}) \right\} \tilde{\underline{E}}_{at} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Tale espressione vale in generale, cioè per qualunque forma di Σ_a , purché valga l'assunzione (6.21).

6.3 Irradiazione di un'antenna a tromba con apertura rettangolare

6.3.1 Calcolo del campo

Nel caso di una guida con apertura rettangolare l'espressione della $\underline{P}_e(\hat{r})$ e del campo $\underline{E}_{at}$ si possono semplificare in quanto sia $\underline{e}(\underline{\rho})$ che l'equazione della superficie Σ_a (rettangolare) sono separabili in coordinate cartesiane. Per ovvi motivi di simmetria si considera il sistema di riferimento al centro della guida stessa (vedi Fig. 6.11)¹. Consideriamo il caso più usuale,

¹Si noti che, in altre trattazioni, si preferisce centrare il sistema di riferimento su uno spigolo della guida anziché nella mezzzeria.

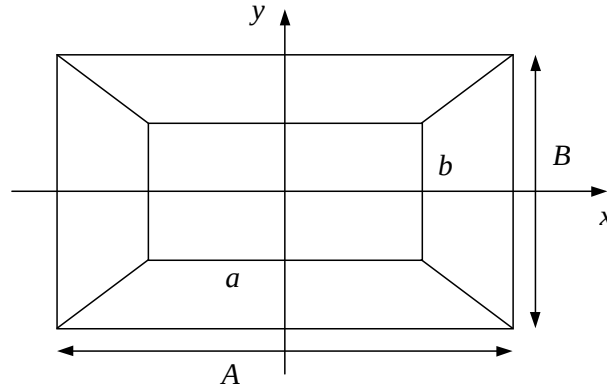


Figura 6.11. Sistema di riferimento sulla superficie di apertura dell'antenna a tromba rettangolare.

quello in cui l'antenna funziona in modo TE_{10} , per cui l'espressione dell'autofunzione modale con le coordinate di Fig. 6.11 si scrive

$$\underline{e}_{10}''(x,y) = \cos t \hat{y} \cos \left(\pi \frac{x}{a} \right) \quad (6.28)$$

Con le approssimazioni fatte, l'espressione del campo sull'apertura Σ_a assume la forma

$$\underline{E}_{at} = E_0 \hat{y} \cos \left(\pi \frac{x}{A} \right) \Pi \left(\frac{x}{A} \right) \Pi \left(\frac{y}{B} \right) \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad (6.29)$$

dove $\Pi(t)$ è la funzione porta rappresentata in Fig. 6.12; usando la separabilità della (6.29),

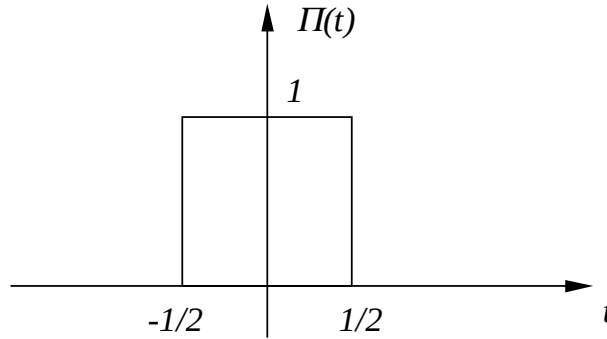


Figura 6.12. Funzione porta.

l'integrale doppio nella (6.8) si separa in due integrali su x e y , e possiamo riscrivere la (6.27) come

$$\underline{P}_e(\hat{r}) = -\frac{1}{Z_0} E_o \left\{ \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \hat{y} - (\hat{r} \times \underline{I}) \cdot (\hat{z} \times \hat{y}) \right\} F(k_0 \hat{r}) \quad (6.30)$$

dove

$$\begin{aligned} F(k_0 \hat{r}) &= \iint_{\Sigma_A} dx dy e^{j(\xi x + \eta y)} \cos \left(\pi \frac{x}{a} \right) \Pi \left(\frac{x}{A} \right) \Pi \left(\frac{y}{B} \right) = \\ &= \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} dx e^{j\xi x} \cos \left(\pi \frac{x}{A} \right) \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} dy e^{j\eta y} \end{aligned} \quad (6.31)$$

mentre

$$\begin{aligned}\xi &= k_0 \sin \theta \cos \phi \\ \eta &= k_0 \sin \theta \sin \phi\end{aligned}\quad (6.32)$$

L'unico termine vettoriale rimasto è quello entro le parentesi graffe dell'Eq. (6.30), che possiamo svolgere come segue:

$$\begin{aligned}\{\dots\} &= \hat{\theta}\hat{\theta} \cdot \hat{y} + \hat{\phi}\hat{\phi} \cdot \hat{y} - \hat{\phi}\hat{\theta} \cdot (-\hat{x}) + \hat{\theta}\hat{\phi} \cdot (-\hat{x}) = \\ &= \hat{\theta} (\cos \theta \sin \phi) + \hat{\phi} \cos \phi + \hat{\phi} (\cos \theta \cos \phi) + \hat{\theta} \sin \phi = \\ &= (1 + \cos \theta) (\hat{\theta} \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi) = \\ &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \hat{p}(\theta, \phi)\end{aligned}\quad (6.33)$$

avendo posto

$$\hat{p}(\theta, \phi) = \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi} \quad (6.34)$$

La $\underline{P}_e(\hat{r})$ risultante è allora

$$\underline{P}_e(\hat{r}) = -\frac{E_0}{Z_0} 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \hat{p}(\theta, \phi) F(\theta, \phi) \quad (6.35)$$

Per quanto concerne le due trasformate presenti nella (6.31), esse sono due semplici integrali; quello in y è la trasformata di una porta, cioè una sinc, e l'integrale in x si calcola senza difficoltà separando il cos in due esponenziali. Introducendo una notazione usata abitualmente in letteratura, poniamo

$$F_E(u) = \text{sinc}(u) ; F_H(u) = \frac{\cos(u)}{1 - \left(\frac{2}{\pi}u\right)^2} \quad (6.36)$$

e, raggruppando i termini, scriviamo

$$F(\theta, \phi) = A B \frac{2}{\pi} F_H \left(\frac{1}{2} k_0 A \sin \theta \cos \phi \right) F_E \left(\frac{1}{2} k_0 B \sin \theta \sin \phi \right) \quad (6.37)$$

Osserviamo che entrambe le F_E ed F_H hanno solo singolarità apparenti; questo è un caso particolare del risultato generale di assenza di singolarità nelle trasformate di Fourier a supporto finito.

6.3.2 Analisi del campo irradiato

Notiamo innanzitutto che la polarizzazione è determinata esclusivamente da $\hat{p}$, che rappresenta quindi il versore di polarizzazione dell'antenna, e dall'Eq. (6.34) è evidente che la polarizzazione dell'antenna è lineare in qualunque direzione di osservazione $\hat{r}$. Invece le proprietà di direttività sono date da quelle di $|\underline{P}_e|$.

$$|\underline{P}_e(\theta, \phi)|^2 = \cos^2 \left[\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^2 \left| F_H \left(\frac{1}{2} \xi A \right) \right|^2 \left| F_E \left(\frac{1}{2} \eta B \right) \right|^2 \quad (6.38)$$

Si può osservare nell'equazione (6.38) che il termine $\cos^2(\theta/2)$, nell'intervallo d'osservazione $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, non ha zeri e quindi non influisce molto sulla direttività. Notiamo che l'involuppo

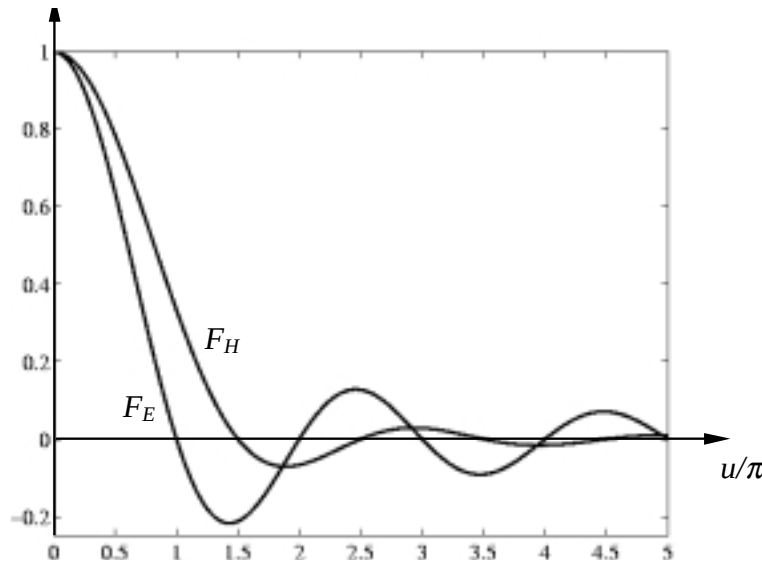


Figura 6.13. Diagramma di F_E e F_H .

di F_H decresce come la variabile $\frac{1}{u^2}$, mentre quello della F_E ha un andamento del tipo $\frac{1}{u}$. Si ha dunque che $F_H(u)$ presenta il primo lobo più largo di quello di $F_E(u)$ (vedi Fig. 6.13). Del diagramma d'irradiazione tipicamente si studiano gli andamenti a $\phi = \text{cost}$ e θ variabile, detti *tagli*; i due casi più importanti sono i tagli $\phi = 0$, oppure $\phi = \pi$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$, oppure $\phi = -\frac{\pi}{2}$.

a) $\phi = 0$ o π (ovvero piano coordinato (x, z)).

In questo caso il versore di polarizzazione diviene

$$\hat{p}(\theta, 0) = \hat{\phi}(\phi = 0) = \hat{y} \quad (6.39)$$

e quindi $\underline{E} \parallel \hat{y}$; d'altro canto in tal piano $\hat{\theta}$ giace sul piano stesso, e così $\underline{H} \parallel (\hat{r} \times \underline{E})$; pertanto questo piano $\phi = 0, \pi$, ovvero (x, z) , è il *piano H* (vedere definizione in 3.2.4). Il modulo della $\underline{P}_e(\theta, \phi)$ assume la forma seguente:

$$\begin{aligned} |\underline{P}_e(\theta, \phi)| &= \cos t \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left| F_H\left(\pi \frac{A}{\lambda} \sin(\theta)\right) \right| |F_E(0)| \\ &\propto \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left| F_H\left(\pi \frac{A}{\lambda} \sin(\theta)\right) \right| \end{aligned} \quad (6.40)$$

Gli andamenti dei campi sono rappresentati in figura (6.14).

b) $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ (ovvero piano coordinato (y, z)).

Il versore di polarizzazione $\hat{p}$ è dato dall'espressione seguente:

$$\hat{p}\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = \hat{\theta}\left(\phi = \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.41)$$

È facile verificare che in tale piano $\hat{\theta}$ giace sul piano stesso, che è quindi il *piano E* (vedere definizione in 3.2.4). Per il modulo si ricava che

$$|\underline{P}_e(\theta, \phi)| \propto \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left| F_E\left(\pi \frac{B}{\lambda} \sin(\theta)\right) \right| \quad (6.42)$$

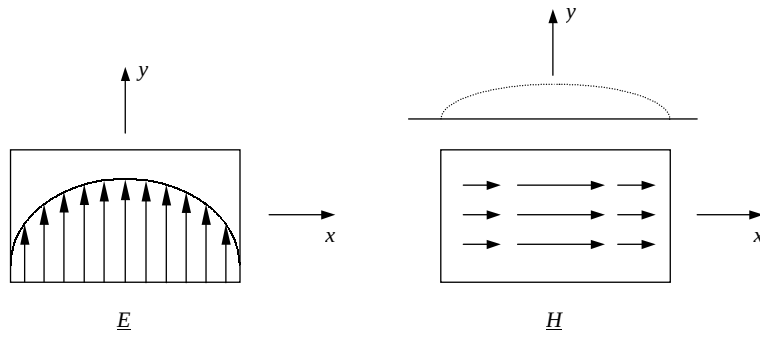


Figura 6.14. Andamento qualitativo dei campi $\underline{E}$ e $\underline{H}$ in una sezione trasversale della guida, o sulla bocca.

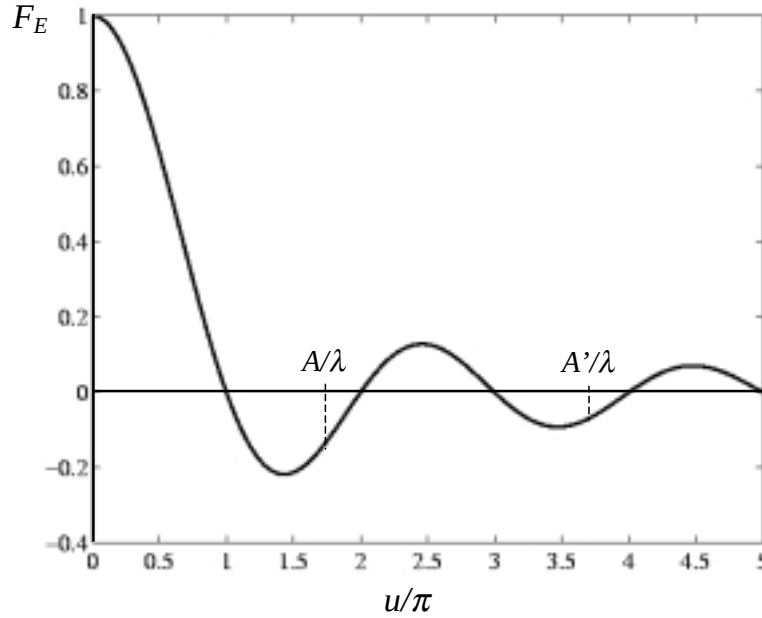


Figura 6.15. Dipendenza dell'intervallo del visibile dall'apertura dell'antenna a tromba.

Rispetto a tali risultati, appare ovvio il nome dato alle due funzioni F_E e F_H . Notiamo che la denominazione piano E / piano H è molto usata in tutte le antenne a polarizzazione lineare, e non solo per l'antenna a tromba, in quanto identifica univocamente i tagli in base a grandezze osservabili (i campi), e non è legata a scelta di coordinate. Notiamo infine che anche sull'apertura ($z = 0$) $\underline{E}$ giace nel piano E (qui ridotto all'asse y) ed $\underline{H}$ nel piano H (asse x), come mostrato in Fig. 6.14.

Per quanto riguarda il diagramma di irradiazione, è chiaro dalle (6.40) e (6.42) che le variabili osservabili θ e ϕ sono legate all'argomento delle trasformate F_E e F_H in modo non lineare. L'intervallo degli argomenti di F_E e F_H corrispondenti ai valori ammissibili degli angoli θ e ϕ si chiama *intervallo visibile*. Poiché nel nostro caso $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$, $\phi \in [0, 2\pi]$, il visibile per l'argomento di F_H , cioè $\xi = \frac{\pi A}{\lambda} \sin \theta \cos \phi$, è l'intervallo $\xi \in [0, \frac{\pi A}{\lambda}]$, nel senso che valori di u al di fuori di esso non corrispondono a direzioni fisicamente osservabili. Analogamente, l'intervallo visibile per l'argomento $\eta = \frac{\pi B}{\lambda} \sin \theta \sin \phi$ di F_E è $\eta \in [0, \frac{\pi B}{\lambda}]$.

È evidente dalla Fig. 6.15 che, al crescere dell'apertura dell'antenna a tromba, aumenta anche l'intervallo visibile; infatti il numero di lobi secondari nel diagramma di irradiazione è proporzionale a d/λ , dove d (A o B) è la dimensione dell'apertura. Un esempio chiarificherà il concetto appena esposto.

Esempio

- Disegniamo il diagramma di irradiazione polare nel piano E , trascurando il termine $\cos^2(\frac{\theta}{2})$ nei casi seguenti:
 - $B = \lambda$;
 - $B = 2\lambda$.

Nel caso a) L'intervallo del visibile è l'intervallo $[0, \pi]$, cioè viene incluso solo il lobo principale (vedi Fig. 6.16.a) mentre il suo diagramma d'irradiazione polare è rappresentato in Fig. 6.16.b.

Invece nel caso (b) l'intervallo del visibile è $[0, 2\pi]$. Dalla Fig. 6.31.a possiamo vedere che oltre al lobo principale è incluso anche il primo lobo secondario. Il diagramma polare è rappresentato in Fig. 6.17.b. Si

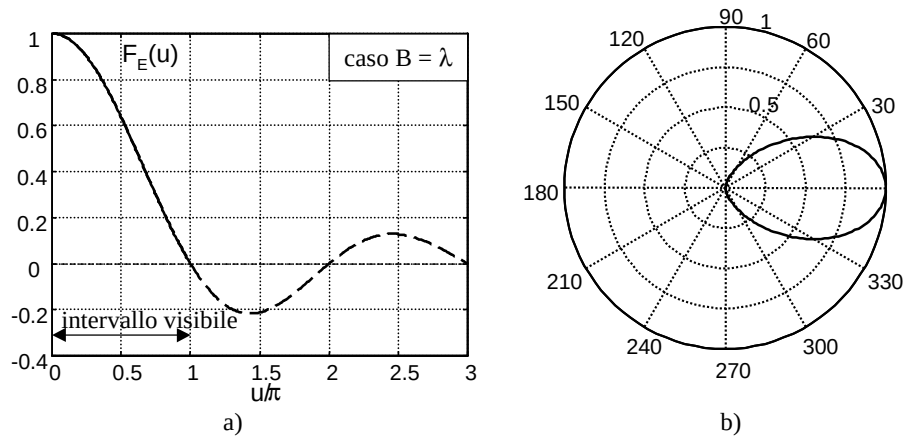


Figura 6.16. Diagramma di irradiazione con $B = \lambda$ di F_E (a) e di $F_E(\theta)$ (b).

può notare che nel caso (b) l'antenna è più direttiva, ciò è dovuto al fatto che la dimensione dell'apertura è maggiore, a conferma del fatto che la direttività è proporzionale ad B/λ .

- Confrontiamo ora piano E e piano H a parità di dimensioni di apertura cioè per $A = B$. Il primo zero θ_{H1} nel piano H si ha quando $\pi \frac{A}{\lambda} \sin \theta_{H1} = \frac{3}{2}\pi$, quindi quando $\sin \theta_{H1} = \frac{3/2}{B/\lambda}$. Analogamente per il piano E ricaviamo $\sin(\theta_{E1}) = \frac{1}{A/\lambda}$. Si osserva allora che il lobo principale è più stretto nel piano E , mentre i lobi secondari sono più bassi nel piano H (vedi Fig. 6.13).

6.3.3 “Tapering”

Analizzando l'espressione della F_E e della F_H notiamo di nuovo che la F_E è la trasformata di Fourier di una porta, mentre la F_H è proporzionale alla trasformata di Fourier di un coseno per una porta (vedi Fig. 6.18). Le discontinuità presenti nella funzione porta $\Pi(t)$ generano un involuppo della F_E del tipo $\frac{1}{u}$ mentre quelle presenti nella F_H (funzione continua con derivata

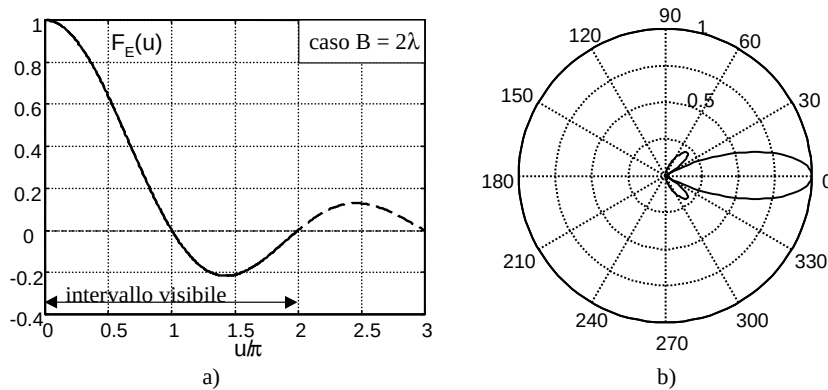


Figura 6.17. Diagramma di irradiazione con $B = 2\lambda$ di F_E (a) e di $F_E(\theta)$ (b).

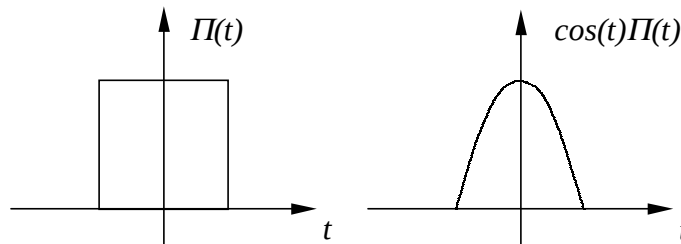


Figura 6.18. Distribuzione di apertura nei piani E (sinistra) e H (destra) per la tromba rettangolare (modo TE_{10}).

prima discontinua) danno luogo ad un involuppo della F_H del tipo $\frac{1}{u^2}$. Questo concetto è espresso dalla grandezza detta *tapering* (“rastrematura”) t definita come il rapporto tra il campo (elettrico) sul bordo e quello al centro (valore massimo). Il tapering usualmente è espresso in dB. Nel caso del piano E si ha $t = 0$ dB, mentre nel piano H si ha $t \rightarrow \infty$ dB. In generale si può affermare che maggiore è il salto (discontinuità) della funzione e più alto è il livello dei lobi secondari. Notiamo che nella tromba analizzata il tapering nei due piani è fissato, così come il diagramma di irradiazione, e quindi non si possono imporre vincoli (di progetto) al livello dei lobi secondari. Tuttavia il concetto di tapering è generale, e di grande importanza nelle antenne a riflettore, in cui la forma del campo di apertura è usualmente controllabile. Ciò è possibile anche in una tromba, ma meno agevolmente: tipicamente si altera la forma del campo di apertura “innescando” anche modi superiori.

6.3.4 “Errore di fase” sull’apertura

Abbiamo sinora considerato una semplice forma di campo sull’apertura, in cui il campo ha la stessa fase su tutta l’apertura. In realtà, se all’interno della guida i fronti di fase sono piani paralleli (e quindi a parità di coordinata z la fase è la stessa per ogni x e y), nella transizione e nello spazio libero invece i fronti di fase sono all’incirca sferici, e quindi sull’apertura (piano a $z = cost$) il campo ha fase diversa in punti (x, y) diversi (vedi Fig. 6.19). perché i punti sull’apertura appartengono a diverse superfici a fase costante. Allora il campo sull’apertura è

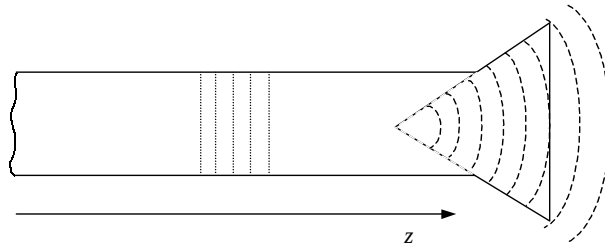


Figura 6.19. Andamento dei fronti di fase del campo elettrico all'interno e nella transizione della guida.

con migliore approssimazione del tipo

$$\underline{E}_a(x,y) = \underline{E}_{ao}(x,y) e^{j\phi(x,y)} \quad (6.43)$$

dove $\underline{E}_{ao}(x,y)$ è il campo della guida “dilatata” che abbiamo considerato sinora, mentre $e^{j\phi(x,y)}$ indica la non uniformità di fase sull'apertura chiamata comunemente (e impropriamente) “*errore di fase*”. L'errore di fase complica lo studio dell'irradiazione, anche quando, come usuale, si possa approssimare quadraticamente

$$\phi(x,y) = ax^2 + by^2 \quad (6.44)$$

Infatti, in tal caso l'integrale di irradiazione (6.31) diviene, per la tromba in TE_{10}

$$\underline{E}_a(x,y) = \cos t \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} dx dy \cos\left(\pi \frac{x}{A}\right) e^{j(ax^2+by^2)} e^{j(\xi x + \eta y)} \quad (6.45)$$

che non è più la trasformata di Fourier di semplici funzioni, e dà invece luogo a funzioni speciali note come integrali di Fresnel. L'effetto qualitativo dell'errore di fase è quello di ridurre, a parità di dimensione dell'apertura, la direttività dell'antenna, di “riempire” gli zeri (che diventano minimi più o meno pronunciati), e di alzare il livello dei lobi secondari. In generale quindi l'effetto dell'errore di fase è sgradito, ma la variazione di fase sull'apertura $\Delta\phi = \phi_{centro} - \phi_{bordo}$ è proporzionale all'allargamento del fronte di fase; infatti, a parità di dimensioni più è grande la lunghezza l della tromba (vedi Fig. 6.20) e minore è la variazione di fase. Quindi l'errore di

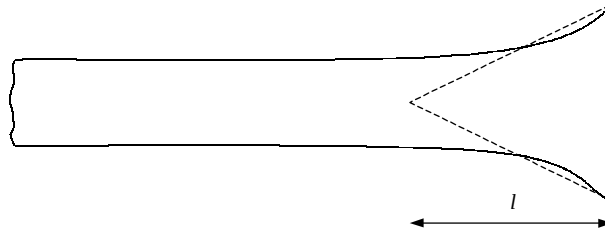


Figura 6.20. Tromba a transizione graduale.

fase si può contenere, ma a costo di un ingombro maggiore; tuttavia, per ridurre l'errore di fase a parità d'ingombro si può fare un'apertura come quella rappresentata in figura (6.20) con una transizione più graduale.

6.3.5 Diagramma d'irradiazione e interferenza di fase

Cominciamo col notare che il termine $e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'}$ che compare nell'espressione della $\underline{P}_e$ (caso generale) è l'approssimazione di campo lontano del termine $e^{jk_0 d(\underline{r}, \underline{r}')}$ (che compare nell'integrale di irradiazione esatto), come mostrato in Fig. 6.21; quindi tale termine corrisponde alla fase accumulata da un'onda piana o sferica nel “cammino” tra il punto “di sorgente” $\underline{r}'$ ed il punto di osservazione $\underline{r}$. Poiché la funzione di Green esprime il campo di una sorgente puntiforme,

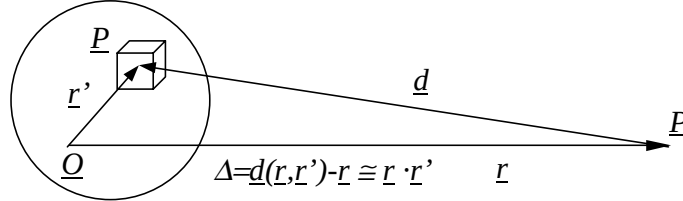


Figura 6.21. Schema per il calcolo della differenza di cammino tra un punto di sorgente generico e il centro del sistema per un osservatore in $\underline{P}$.

l'integrale d'irradiazione (vedi Eq. (2.25)) è la sommatoria di contributi di sorgenti elementari di ampiezza e fase corrispondenti a quelli nel punto $\underline{r}'$. Nelle approssimazioni di campo lontano, l'ampiezza (modulo) dei vari contributi elementari di campo dell'osservatore viene considerata costante; pertanto il diagramma d'irradiazione dipende solo dalla fase relativa dei vari contributi (interferenza di fase). Ciò vuol dire che quando si ha un massimo del diagramma di irradiazione si è in presenza di interferenza costruttiva, mentre quando si ha un minimo o uno zero c'è un'interferenza distruttiva. Notiamo infine che l'approssimazione della regione di Fraunhofer, $d(\underline{r}, \underline{r}') \simeq \underline{r}' \cdot \hat{r} - \underline{r} \cdot \hat{r}$, ovvero

$$\underline{E} \propto \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \underline{P}_e(\hat{r}) \quad (6.46)$$

dove

$$\underline{P}_e(\hat{r}) = \int d\underline{r}' e^{jk_0 \Delta(\underline{r}')} \underline{J}(\underline{r}') \quad , \quad \Delta(\underline{r}') = \hat{r} \cdot \underline{r}' \quad (6.47)$$

corrisponde ad assumere la fase $e^{-jk_0 r}$ tra l'osservatore in $\underline{r}$ e l'origine $\underline{Q}$ (centro della sorgente), e descrivere il diagramma di irradiazione ($|\underline{P}_e(\hat{r})|$) in termini di interferenza di fase tra i contributi che arrivano all'osservatore, e che geometricamente il termine di fase $e^{jk_0 \Delta}$ corrisponde alla fase accumulata dalla propagazione di un'onda lungo il cammino Δ che è la proiezione mostrata in Fig. 6.21; questo è equivalente a considerare $\underline{r}$ all'infinito (vedi Fig. 6.22, e Δ è la differenza di cammino tra il punto di riferimento $\underline{Q}$ ed il punto di sorgente $\underline{r}'$).

Esempio Consideriamo due sorgenti S_1 e S_2 e un osservatore posto in $\underline{P}$ a grande distanza dalla sorgente, come rappresentato in Fig. (6.23). Nella direzione di osservazione le due sorgenti hanno lo stesso sfasamento, quindi se quest'ultime sono in fase in $\underline{P}$ ci sarà un'interferenza costruttiva mentre se sono in opposizione di fase l'interferenza sarà distruttiva. Supponiamo di essere ora nel caso rappresentato in figura (6.24) in cui c'è uno sfasamento $\Delta\phi = k_0 \Delta(\alpha)$ dovuto alla differenza di cammino $\Delta(\alpha)$ che dipende dall'angolo di osservazione α . Analizzando le varie situazioni al variare di α si ottiene il diagramma d'irradiazione.

Si può estendere questo concetto al caso in cui si è in presenza di una sommatoria di contributi elementari del tipo

$$\sum_i f(x_i) e^{j\xi x_i} \quad (6.48)$$

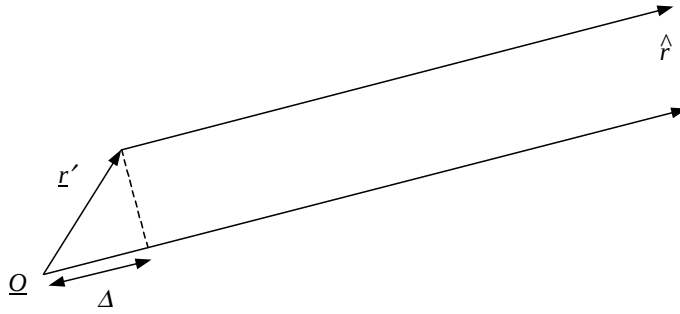


Figura 6.22. Schema per il calcolo della differenza di cammino tra un punto di sorgente generico e il centro del sistema per un osservatore posto all'infinito.

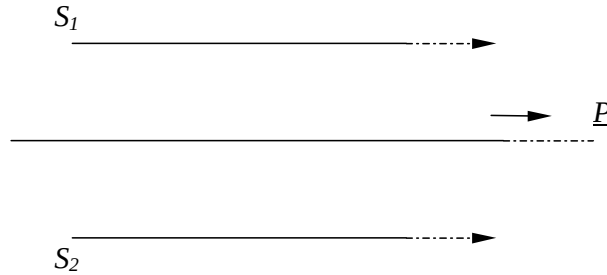


Figura 6.23. Rappresentazione di due sorgenti S_1 e S_2 equidistanti dall'osservatore $\underline{P}$.

che può rappresentare il caso del fattore di schiera (vedi (7.6)) di un allineamento di antenne, oppure la versione discretizzata (approssimata) degli integrali di irradiazione di un'apertura. Cominciamo ad esaminare l'effetto della distribuzione di ampiezza delle sorgenti, cioè assumiamo $f(x)$ reale e positiva. Per facilità di comprensione, consideriamo l'esempio della distribuzione di apertura di una tromba, ed usiamo la terminologia corrispondente per i piani E ed H . Nel piano E il campo ha la distribuzione costante rappresentata in Fig. 6.25.a. I vari contributi all'osservatore hanno tutti la stessa ampiezza $f(x) = 1$ e nella direzione $\theta = 0$ anche la stessa

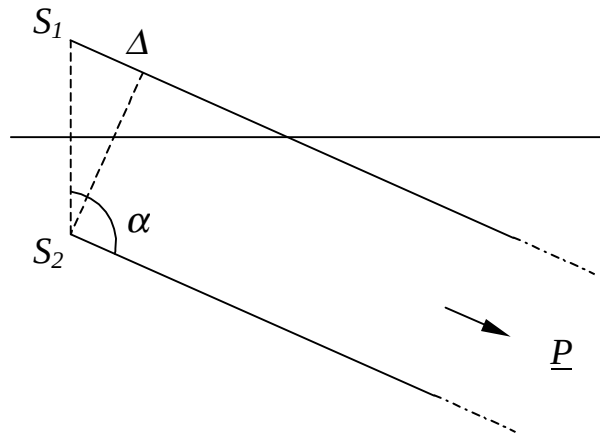


Figura 6.24. Rappresentazione di due sorgenti S_1 e S_2 con una differenza di cammino Δ dall'osservatore O .

fase ($\xi = k_o \sin(\theta) = 0$) si ottiene allora che

$$\underline{E} \propto \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} e^{j\xi x} f(x) dx = \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} 1 dx = A \quad (6.49)$$

Se si considera ora il piano H con una distribuzione non uniforme, come in Fig. 6.25.b, segue

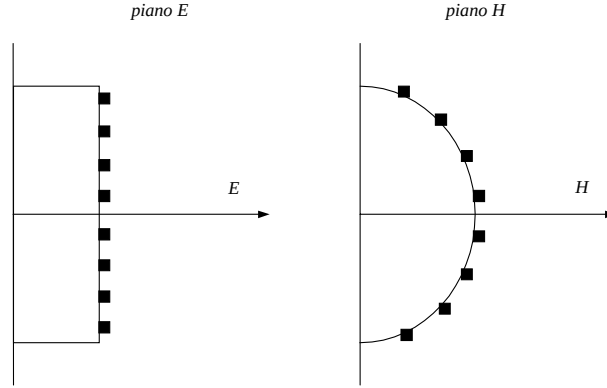


Figura 6.25. Distribuzione dei contributi elementari del campo elettrico nei piani E (a) ed H (b).

che

$$\underline{E} \propto \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} e^{j\xi x} \cos\left(\pi \frac{x}{B}\right) dx = \frac{2B}{\pi} < B \quad (6.50)$$

a parità di dimensioni dell'apertura ($A = B$) il campo generato da una distribuzione uniforme è maggiore, e quindi maggiore sarà la sua direttività.

Per analizzare l'effetto della fase non uniforme, consideriamo per semplicità tre sorgenti con la stessa ampiezza ma con fasi diverse, e analizziamo cosa capita alla somma dei contributi all'osservatore. Consideriamo sorgenti di ampiezza 1 e fase rispettivamente $\phi = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = 0$ (vedi Fig. 6.26). Si ha allora che

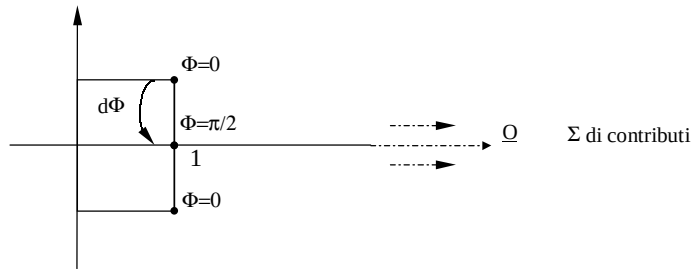


Figura 6.26. Rappresentazione di tre contributi elementari con stessa ampiezza e fase diversa.

$$\left| \sum_i f(x_i) e^{j\xi x_i} \right|^2 = \left| 1 + e^{j\frac{\pi}{2}} + 1 \right|^2 = |2 + j|^2 = 5 \quad (6.51)$$

mentre se la fase fosse stata uniforme avremmo avuto

$$\left| \sum_i f(x_i) e^{j\xi x_i} \right|^2 = |1 + 1 + 1|^2 = 9 \quad (6.52)$$

Possiamo allora vedere che a parità di ampiezza delle sorgenti c'è una riduzione del massimo di ampiezza nel caso di fase non uniforme cui corrisponderà una riduzione del guadagno massimo. Vediamo ora cosa accade ai punti in cui c'è interferenza distruttiva, considerando per semplicità solo due sorgenti poste ad una distanza d come rappresentate in Fig. 6.27. Se esse hanno fase

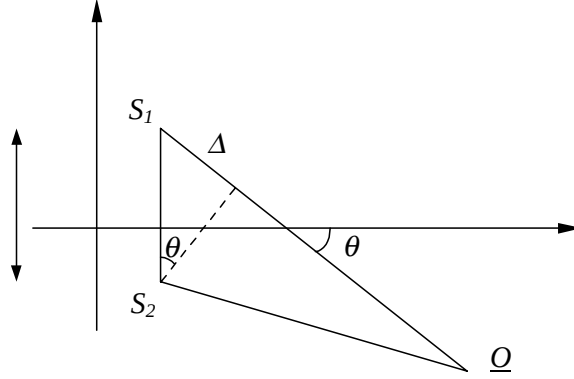


Figura 6.27. Rappresentazione di due sorgenti con differenza di cammino Δ .

uniforme si ha $\Delta = d \sin(\theta)$, il diagramma d'irradiazione si annulla quando $k_0 \Delta = \pi$ cioè quando $\Delta = \frac{\lambda_0}{2}$ e quindi quando $\sin(\theta_0) = \frac{1}{d/\lambda_0}$. Invece se S_1 e S_2 sono del tipo

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= e^{j\Phi} \end{aligned}$$

abbiamo che il diagramma d'irradiazione si annulla per $k_0 \Delta + \Phi = n\pi$. Possiamo dunque notare che gli zeri non sono più in corrispondenza di quelli trovati nel caso di fase uniforme. L'aggiunta di termini di fase, anche se piccoli tra di loro, porta alla scomparsa degli zeri, ad un innalzamento dei lobi secondari e ad un allargamento di quello principale (vedi Fig. 6.28).

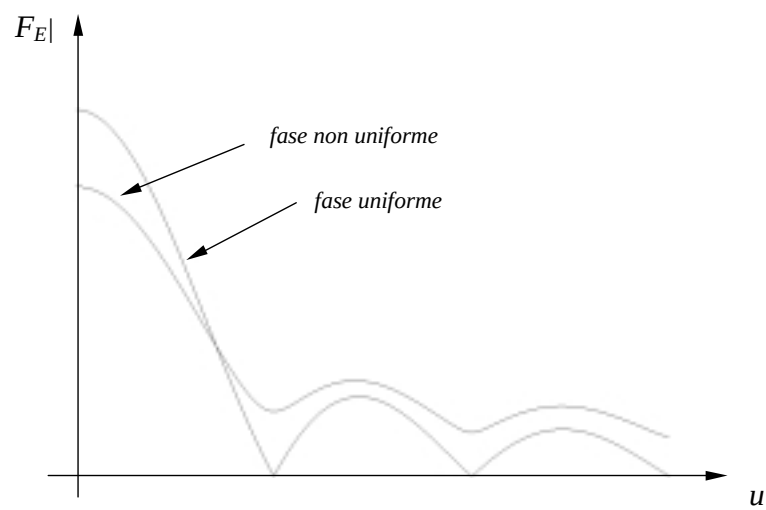


Figura 6.28. Andamenti del F_E nel caso di fase uniforme e non.

7

Schiere di antenne

7.1 Irradiazione da una schiera di antenne

Sinora si è parlato dell'irradiazione di un'unica antenna, ma è lecito chiedersi cosa accade al diagramma di irradiazione di un'antenna quando non irradia una sola antenna, bensì una serie di antenne affiancate, identiche ed equiorientate, cioè una *schiera*. In Fig. 7.1 sono rappresentati due insiemi di antenne: nella Fig. 7.1.a siamo in presenza di una schiera perché i dipoli sono equiorientati, nella Fig. 7.1.b invece non abbiamo una schiera, perché i due dipoli sono ruotati tra di loro. Nel progetto di una schiera di N antenne, oltre alla scelta delle antenne i

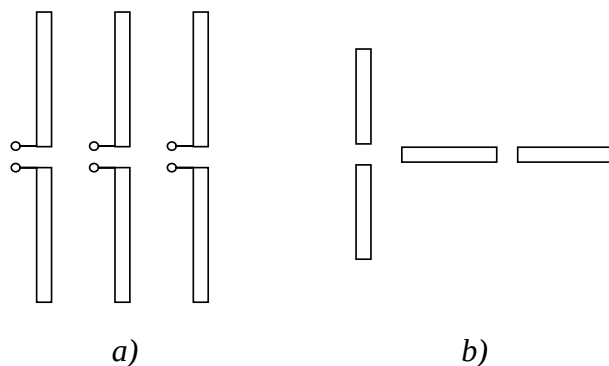


Figura 7.1. Antenne affiancate: a) Schiera di dipoli; b) Gruppo di antenne che non è una schiera.

parametri liberi sono la posizione spaziale delle antenne, cioè i vettori $\{\underline{r}_n\}$, e i loro coefficienti di alimentazione, cioè le ampiezze $\{A_n\}$, con $n = 0, 1, \dots, N - 1$ (vedi Fig. 7.2). Per l'analisi delle schiere si assume che le correnti (elettriche e/o magnetiche) sulle antenne siano già note, quindi l'interazione fra le antenne è rilevata dal solo valore dei coefficienti $\{A_n\}$. Per linearità il campo prodotto dalla schiera in un generico punto dello spazio sarà dato dalla somma dei campi prodotti in tale punto da ciascuna antenna, cioè

$$\underline{E}(\underline{r}) = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{E}_n(\underline{r}) \quad (7.1)$$

dove

$$\underline{E}_n(\underline{r}) = -j \frac{Z_0}{2R_n \lambda} \underline{h}_e(\underline{R}_n) I_n e^{-jk_0 R_n} \quad (7.2)$$

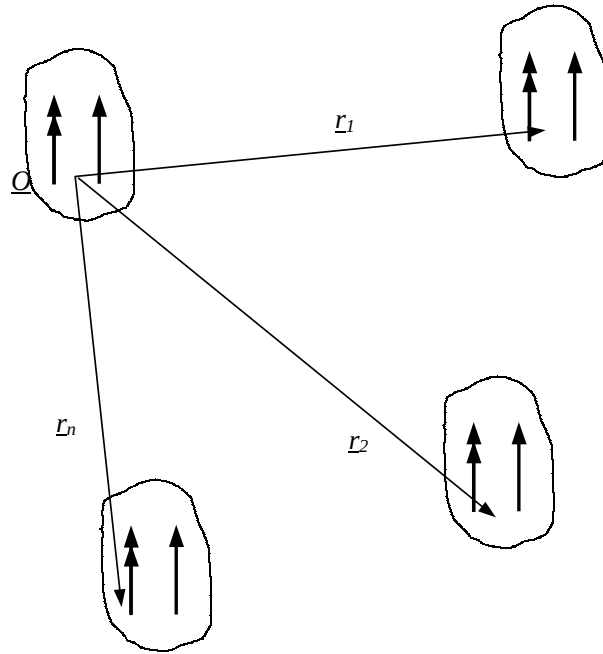


Figura 7.2. Posizione nello spazio delle varie antenne.

essendo $\underline{r}$ il vettore posizione del punto considerato rispetto ad un certo sistema di riferimento, $\underline{R}_n$ il vettore che identifica l' n -esima antenna rispetto allo stesso sistema (vedi Fig. 7.3), ed I_n il coefficiente di alimentazione dell' n -esima antenna. Assumiamo di essere nella regione di

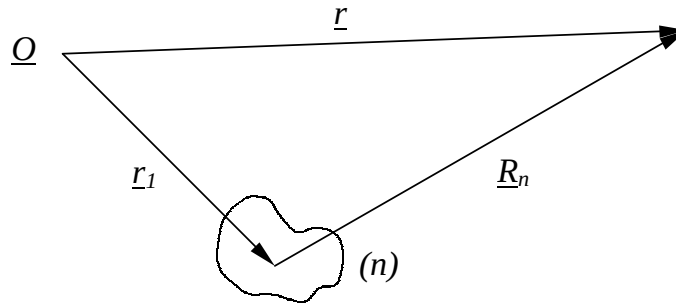


Figura 7.3. Posizione nello spazio dell' n -esimo radiatore.

Fraunhofer dell'intera antenna a schiera; cioè, detta H la dimensione caratteristica della regione che contiene la schiera, si suppone che valgano le ipotesi

$$r > \frac{2H^2}{\lambda} ; r \gg \lambda \quad (7.3)$$

Pertanto, seguendo la stessa sequenza di approssimazioni fatte per una antenna singola, possiamo approssimare

$$\frac{1}{R_n} \simeq \frac{1}{r} ; e^{-jk_0 R_n} \simeq e^{-jk_0 r} e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{R}_n} ; \hat{R}_n \simeq \hat{r} \quad (7.4)$$

e quindi il campo elettrico (7.1) assume la forma

$$\begin{aligned}\underline{E}(\underline{r}) &= -j \frac{Z_0}{2r\lambda} e^{-jk_0 r} \underline{h}_e(\hat{r}) \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}_n} = \\ &= I_0 \frac{-jZ_0}{2r\lambda} e^{-jk_0 r} \underline{h}_e(\hat{r}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{I_n}{I_0} e^{-jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}_n}\end{aligned}\quad (7.5)$$

In questo modo si è fattorizzato il campo in due contributi. La quantità che precede la sommatoria è il campo prodotto da un singolo radiatore (si noti che la scelta del radiatore numero 0 è arbitraria), mentre il termine scalare

$$F(\hat{r}) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}_n} \quad ; \quad a_n \equiv \frac{I_n}{I_0} \quad (7.6)$$

viene chiamato *fattore di schiera*, ed è il termine che rappresenta di fatto l'effetto della presenza di un gruppo di radiatori. Si può notare che la polarizzazione della schiera è la stessa di ciascun radiatore elementare, in quanto il fattore di schiera è scalare. Invece, il diagramma di irradiazione della schiera è dato dal prodotto del diagramma di irradiazione di una singola antenna per il fattore di schiera, cioè

$$|\underline{P}_e(\hat{r})| = |\underline{P}_{e0}(\hat{r})| |F(\hat{r})| \quad (7.7)$$

Analizziamo ora il significato del fattore di schiera. Siccome

$$|\underline{P}_e(\hat{r})| = |F(\hat{r})| \quad (7.8)$$

nel caso in cui $|\underline{P}_{e0}(\hat{r})| = 1$ allora ne risulta che il fattore di schiera è il diagramma di irradiazione di una schiera costituita da radiatori isotropici alimentati ($\{A_n\}$), e disposti ($\{\underline{r}_n\}$) come le antenne della schiera.

Si noti che il diagramma di irradiazione della schiera può essere modificato cambiando semplicemente le alimentazioni a_n e/o le posizioni relative delle antenne nello spazio. Il problema del progetto delle schiere, cioè della determinazione delle posizioni e dei coefficienti di alimentazione in funzione di assegnate specifiche sul diagramma di irradiazione si chiama “sintesi” della schiera.

Inoltre, il fattore di schiera può essere visto come la versione discreta (cioè campionata) dell'integrale di irradiazione e quindi varranno per esso le stesse proprietà generali derivanti da quelle della trasformata di Fourier.

7.2 Schiera lineare uniforme a sfasamento costante

Si considera ora una schiera semplice, ma che costituisce uno dei casi più importanti. Studiamo cioè la struttura formata da una serie di antenne equiorientate, equispaziate e i cui centri sono allineati lungo un'unica retta (vedi Fig. 7.4). Si può scrivere in tal caso $\underline{r}_n = nd\hat{u}$ e quindi $e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}_n} = e^{jk_0 (\hat{r} \cdot \hat{u}) nd}$. Si noti che nel fattore di schiera la direzione di osservazione $\hat{r}$ compare solo tramite la sua proiezione $\hat{r} \cdot \hat{u}$ sull'asse $\hat{u}$ della schiera, cioè tramite il coseno $\cos \alpha$ dell'angolo α compreso tra le due direzioni. Questo riflette la simmetria assiale (cilindrica) di $F(\hat{r})$ che infatti

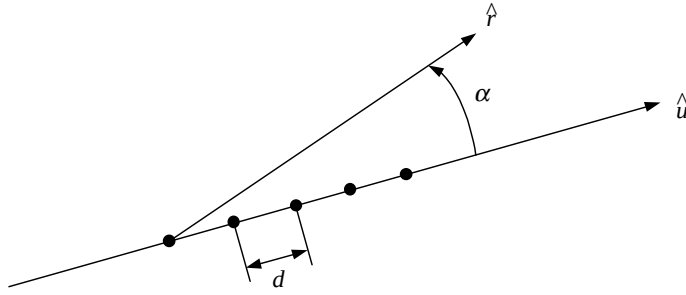


Figura 7.4. Schiera lineare equispaziata.

è il diagramma di irradiazione di una disposizione assiale di antenne isotropiche. Il fattore di schiera può allora essere espresso nella forma seguente:

$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \left(e^{jk_0 d \cos \alpha} \right)^n \quad (7.9)$$

Ponendo $t = e^{jk_0 d \cos \alpha}$ si ottiene un polinomio di grado $N - 1$ nella variabile t , con $|t| = 1$. Ciò è importante per la sintesi dei diagrammi di schiera, perché ci si riconduce allo studio di un polinomio sul cerchio unitario, che è completamente caratterizzato dai suoi zeri.

Esiste una versione ancora più semplice della schiera considerata, avente $|a_n| = 1 \forall n$. In questo caso cambiano solo le fasi e quindi si ha una *schiera lineare uniforme a sfasamento costante*. Il fattore di schiera può essere scritto nella forma

$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\Phi} e^{jk_0 n d \cos \alpha} \quad (7.10)$$

Introducendo la nuova variabile

$$\psi \equiv k_0 d (\hat{u} \cdot \hat{r}) + \Phi \quad (7.11)$$

si ha

$$F(\psi) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\psi} \quad (7.12)$$

È dunque possibile esprimere il fattore di schiera in forma chiusa. Infatti si ha

$$\sum_{n=0}^{N-1} w^n = \frac{1 - w^N}{1 - w} \quad (7.13)$$

e quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} F(\psi) &= \frac{1 - e^{jN\psi}}{1 - e^{j\psi}} = \frac{e^{jN\frac{\psi}{2}} e^{-jN\frac{\psi}{2}} - e^{jN\frac{\psi}{2}}}{e^{j\frac{\psi}{2}} e^{-j\frac{\psi}{2}} - e^{j\frac{\psi}{2}}} = \\ &= e^{j(N-1)\frac{\psi}{2}} \frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Il modulo del fattore di schiera è allora dato da

$$|F(\psi)| = \left| \frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right| \quad (7.15)$$

Questa funzione non presenta poli, cioè altre singolarità al finito, ed inoltre vale N in $\psi = 0$, per cui si può normalizzare nella forma

$$F_N(\psi) = \frac{F(\psi)}{N} \quad (7.16)$$

con $|F_N(0)| = 1$, o meglio

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} |F_N(\psi)| = \lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{1}{N} \left| \frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right| = 1 \quad (7.17)$$

Si può notare ancora che $|F(\psi)|$ è una funzione periodica di periodo 4π ed è una funzione pari. In $\psi \in [0, 2\pi]$, gli zeri sono dati da $\psi_{zm} = \frac{m2\pi}{N}$ con m numero intero tale che $0 < m < N$, perché quando $\frac{\psi}{2} = Nq\pi$ (q numero intero) si hanno zeri apparenti, cancellati dagli zeri del denominatore. Occorre fare attenzione al fatto che ψ non è un angolo geometrico, ma è legato

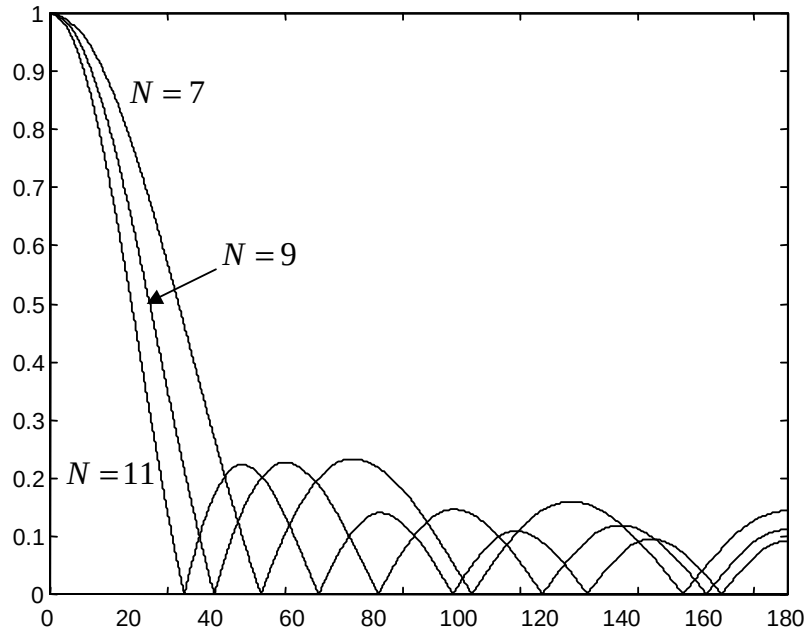


Figura 7.5. Grafico della funzione $|F(\psi)|$.

all'angolo α di osservazione dalla relazione

$$\psi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \cos \alpha + \Phi \quad (7.18)$$

Dunque con $F(\psi)$ è possibile rappresentare ogni tipo di schiera (uniforme): i parametri liberi di progetto sono solo N, d, Φ e, fissato N, d e Φ sono contenuti in ψ . Proprio perché ψ non è un angolo geometrico siamo interessati al solo *intervallo del visibile*, quello, cioè, per cui $\alpha \in [0, \pi]$ (α è un angolo polare), dato da

$$\psi \in \left[\Phi - 2\pi \frac{d}{\lambda}, \Phi + 2\pi \frac{d}{\lambda} \right] \quad (7.19)$$

e quindi, fissati d e λ , cambia la “finestra” in cui si considera il fattore di schiera (vedi Fig. 7.6).

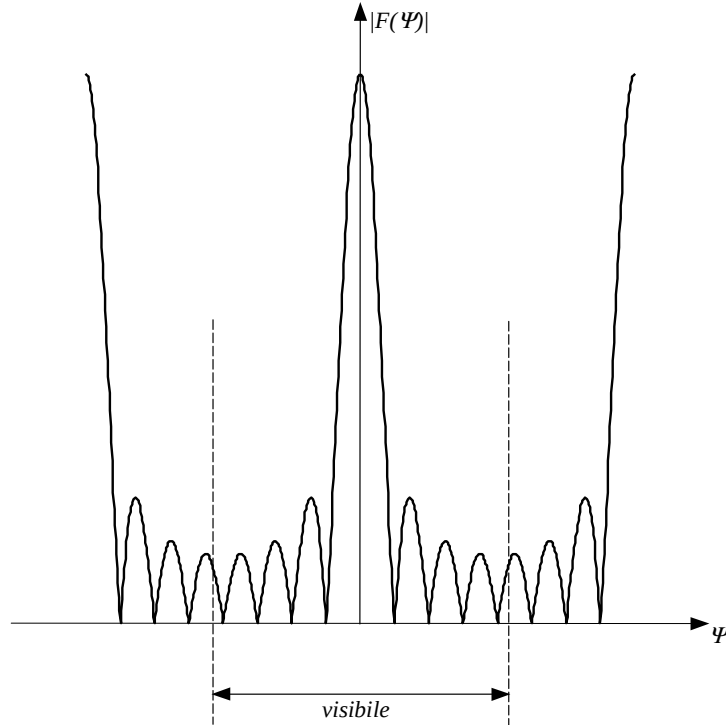


Figura 7.6. Fattore di schiera ed intervallo del visibile per $\Phi = 0$.

La direzione di massima irradiazione α_{max} di una schiera è relativa ad un valore di ψ pari a 0 o 2π . Si ha allora

$$2\pi \frac{d}{\lambda} \cos \alpha_{max} + \Phi = 0 \Rightarrow \cos \alpha_{max} = -\frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{d/\lambda} \quad (7.20)$$

La presenza dello sfasamento Φ nell'espressione di α_{max} è importante: variando lo sfasamento varia la direzione di massima irradiazione della schiera. Si può dunque fare la cosiddetta “scansione del fascio” (*beam scanning*) semplicemente variando le fasi dei radiatori (cioè senza la necessità di muovere meccanicamente l'antenna). Notiamo altresì che $\psi \propto \frac{d}{\lambda}$ e quindi ψ dipende dalla frequenza di lavoro; dunque le schiere raramente possono essere utilizzate su larghe bande di frequenza, e ciò ne costituisce un aspetto negativo.

7.2.1 Schiere *broadside* ed *endfire*.

Consideriamo due esempi notevoli di schiere:

1. $\alpha_{max} = \pi/2$;
2. $\alpha_{max} = 0$, oppure $\alpha_{max} = \pi$.

Nel primo caso la schiera è detta *broadside* (BS); poiché $\alpha_{max} = \pi/2$,

$$2\pi \frac{d}{\lambda} \cos \frac{\pi}{2} + \Phi_{BS} = 0 \quad (7.21)$$

deve essere $\Phi_{BS} = 0$.

Nel secondo caso la schiera è detta *endfire* (EF); siccome

$$2\pi \frac{d}{\lambda} \cos 0 + \Phi_{EF} = 0 \quad (7.22)$$

si ha $\Phi_{EF} = -2\pi \frac{d}{\lambda}$. Alternativamente, per $\alpha_{max} = \pi$, $\Phi_{EF} = 2\pi \frac{d}{\lambda}$. I fattori di schiera nei due casi sono rappresentati nella Fig. 7.7.

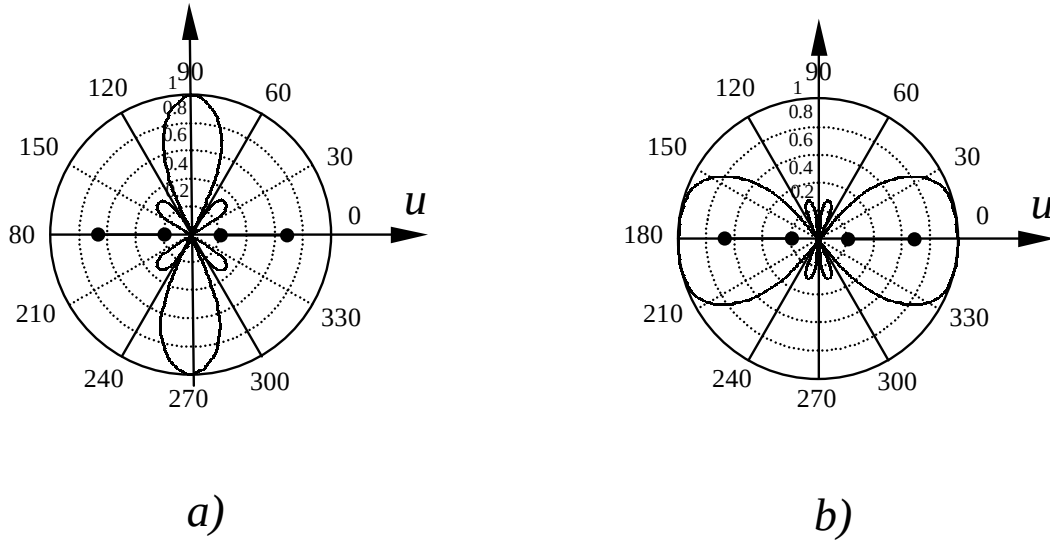


Figura 7.7. Fattore di schiera per schiera BS (a) e schiera EF (b), nel caso $N = 4$ e $\frac{d}{\lambda} = 1/2$.

Supponiamo ora di avere una schiera BS con N elementi, e di voler determinare l'espressione del primo zero del fattore di schiera. Si ha

$$2\pi \frac{d}{\lambda} \cos \alpha_{z_1} = \frac{2\pi}{N} \quad (7.23)$$

perché $\Phi_{BS} = 0$. Quindi

$$\cos \alpha_{z_1} = \frac{1}{N} \frac{1}{d/\lambda} \quad (7.24)$$

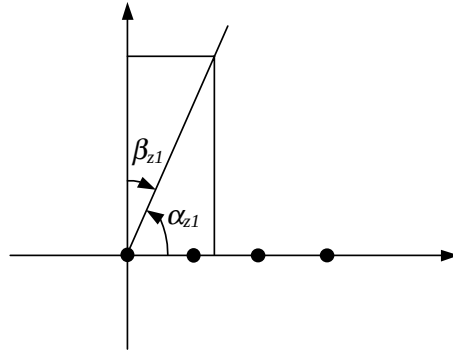


Figura 7.8. Angolo β_{z1} tale che $\cos \alpha_{z1} = \sin \beta_{z1}$.

Il lobo principale si stringe se aumenta N (aumenta α_{z1} e quindi diminuisce β_{z1} tale che $\cos \alpha_{z1} = \sin \beta_{z1}$, vedi Fig. 7.8), dunque aumenta il guadagno. Sembrerebbe sufficiente aumentare il numero di elementi della schiera, oppure aumentare $\frac{d}{\lambda}$, per ottenere un guadagno elevato quanto si vuole; tuttavia, fissato N , aumentando la distanza d fra i radiator (per aumentare il guadagno) oltre un certo valore, si può verificare (numericamente) che il guadagno inizia a diminuire. Ciò accade perché crescendo $\frac{d}{\lambda}$ si allarga l'intervallo visibile in ψ , sino ad includere altri massimi (lobi principali) nel visibile.

7.2.2 Grating lobes.

La presenza di due o più lobi principali nel visibile, detti *grating lobes* (GL), è usualmente un fenomeno indesiderato, in quanto causa una diminuzione del guadagno massimo. Intuitivamente ciò accade perché non c'è un angolo unico in cui vi è irradiazione massima, e quindi la direttività è chiaramente più bassa. Il fenomeno dei grating lobes può presentarsi per qualsiasi tipo di schiera, non solo per il caso particolare considerato.

Analizziamo ora il fenomeno nel caso più semplice di schiere lineari uniformi a sfasamento progressivo, cercando il valore di $\frac{d}{\lambda}$ che corrisponde all'insorgenza di GL; in genere si considera come situazione limite per l'assenza dei GL quella in cui il limite del visibile corrisponde con l'ultimo zero prima del secondo lobo principale. Consideriamo dapprima il caso BS (broadside) che è più semplice; in tal caso $\Phi = 0$, e l'espressione di ψ diventa allora

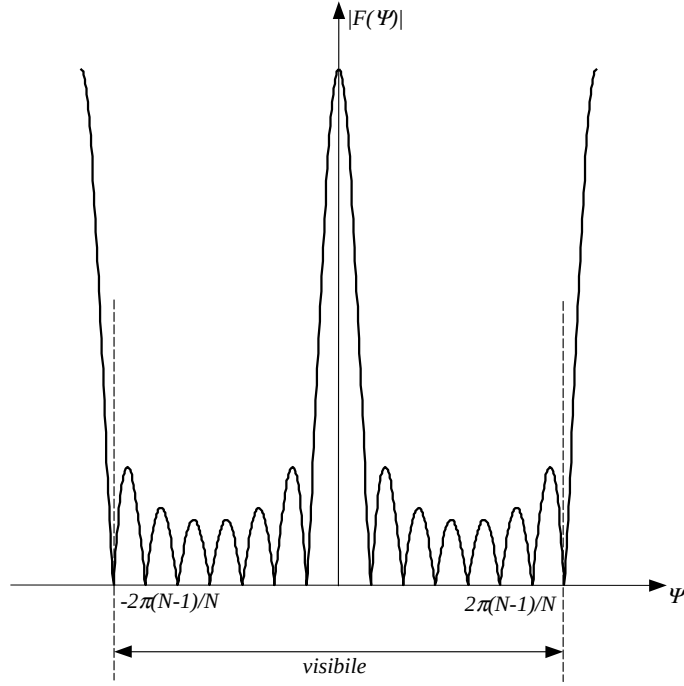
$$\psi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \cos \alpha \quad (7.25)$$

Si è visto che gli zeri del diagramma di irradiazione sono dati da

$$\psi_{zm} = m \frac{2\pi}{N} \quad ; \quad m < N \quad (7.26)$$

e l'ultimo zero prima del GL si ha per $m = N - 1$, (vedi la Fig. 7.9). Affinché non si abbia l'insorgenza dei grating lobes occorre che

$$\psi_{max} = 2\pi \frac{d}{\lambda} \leq \psi_{z_{N-1}} = (N - 1) \frac{2\pi}{N} \quad (7.27)$$

Figura 7.9. Campo del visibile per $\phi = 0$.

dove ψ_{max} è l'estremo del visibile, da cui si ricava

$$\frac{d}{\lambda} \leq 1 - \frac{1}{N} \quad (7.28)$$

Nel caso generale di schiera lineare uniforme a sfasamento progressivo si ha

$$\psi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \cos \alpha + \Phi \quad (7.29)$$

dove l'intervallo del visibile è dato da

$$\psi \in \left[\Phi - 2\pi \frac{d}{\lambda}, \Phi + 2\pi \frac{d}{\lambda} \right] \quad (7.30)$$

centrato in Φ , e con semiampiezza pari a $\Delta\psi = 2\pi \frac{d}{\lambda}$ (vedi Fig. 7.10).

Cerchiamo il valore critico di $\frac{d}{\lambda}$ per il caso $\Phi \geq 0$, in cui è l'estremo destro dell'intervallo ad essere più prossimo al primo massimo secondario (in $\psi = 2\pi$). Imponiamo quindi di nuovo che $\psi_{max} \leq \psi_{z_{N-1}}$, che adesso è:

$$\Phi + \Delta\psi \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right) 2\pi \quad (7.31)$$

da cui

$$\frac{d}{\lambda} \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right) - \frac{\Phi}{2\pi} \quad (7.32)$$

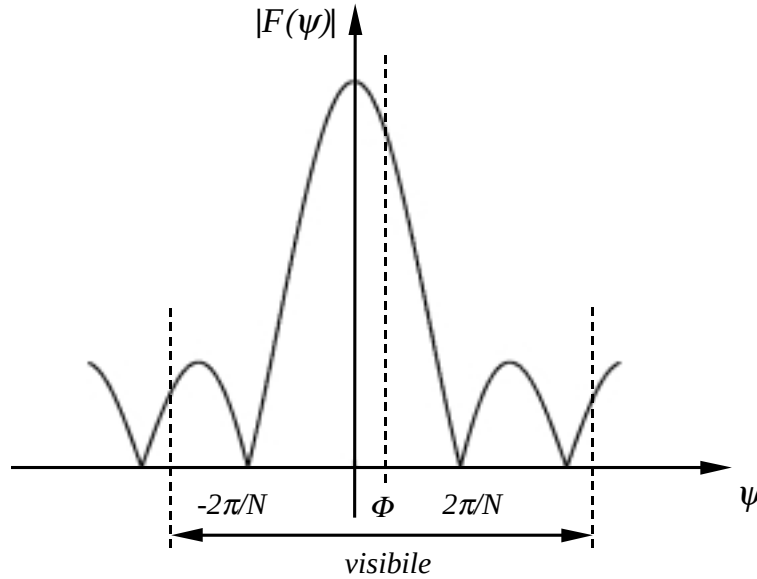


Figura 7.10. Campo visibile per $\Phi \neq 0 (\Phi > 0)$.

Analogamente, per il caso $\Phi \leq 0$ si ottiene

$$\Phi - \Delta\psi \geq -\left(1 - \frac{1}{N}\right) 2\pi \quad (7.33)$$

$$\frac{d}{\lambda} \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{\Phi}{2\pi} \quad (7.34)$$

Si possono quindi riassumere i due casi nell'espressione seguente

$$\frac{d}{\lambda} \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right) - \left| \frac{\Phi}{2\pi} \right| \quad (7.35)$$

È spesso utile esprimere la (7.35) in funzione di α_{max} , cioè in funzione della direzione di massima irradiazione; sapendo che

$$\psi(\alpha_{max}) = 0 \quad (7.36)$$

Ricordando l'espressione di ψ si ha

$$2\pi \frac{d}{\lambda} \cos \alpha_{max} + \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = -2\pi \frac{d}{\lambda} \cos \alpha_{max} \quad (7.37)$$

e sostituendo nella (7.35) si ottiene

$$2\pi \frac{d}{\lambda} \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right) 2\pi - 2\pi \frac{d}{\lambda} |\cos \alpha_{max}| \quad (7.38)$$

$$\frac{d}{\lambda} \leq \frac{1 - \frac{1}{N}}{1 + |\cos \alpha_{max}|} \quad (7.39)$$

Se si ha la possibilità di scegliere la direzione di massima irradiazione si cerca di posizionarla trasversalmente all'asse della schiera in maniera tale da massimizzare il guadagno ed evitare

l'insorgenza dei GL. Dal punto di vista pratico, sapendo che il diagramma d'irradiazione della schiera è dato dal prodotto del fattore di schiera per il diagramma d'irradiazione del singolo radiatore, si può superare il limite trovato per $\frac{d}{\lambda}$ cancellando i grating lobes con gli zeri del diagramma d'irradiazione del radiatore. Questa soluzione viene particolarmente utilizzata per radiatori con dimensioni paragonabili alla lunghezza d'onda, come per esempio la tromba. Infatti in questi casi per evitare GL è sempre necessario avere $d \leq \lambda$ e quindi le antenne verrebbero fisicamente a sovrapporsi essendo le loro dimensioni circa uguali a λ . Nella Fig. 7.11 è rappresentato un esempio di annullamento dei grating lobes.

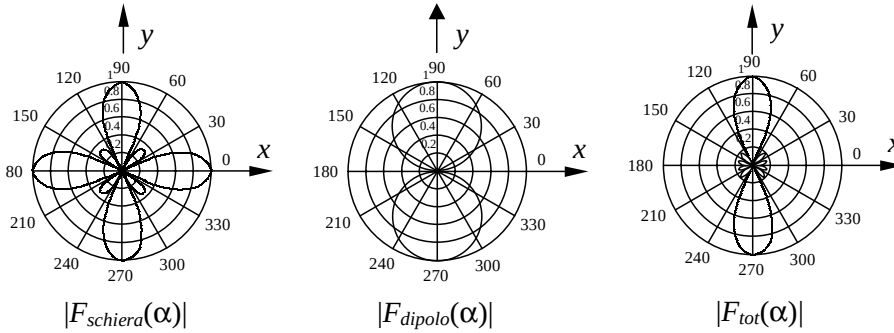


Figura 7.11. Esempio di annullamento dei GL.

7.3 Lobi secondari e schiere non uniformi

Fino ad ora abbiamo parlato di schiere uniformi a sfasamento costante, per cui $|a_n| = 1$, $n = 0, \dots, N$.

Abbiamo visto (nella (7.24)) che, variando la distanza tra gli elementi, si riesce ad ottenere una direttività più o meno marcata, mentre, come verificheremo ora, il livello del primo lobo secondario non scende mai al di sotto di circa -13dB. Il diagramma d'irradiazione relativo è sempre determinato dalla (7.16)

$$F_N = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}$$

Il primo zero è $\psi_{z1} = \frac{2\pi}{N}$ mentre il secondo $\psi_{z2} = \frac{4\pi}{N}$; approssimiamo la posizione del massimo del primo lobo secondario con il valore medio

$$\psi_{s1} \simeq \frac{1}{2}(\psi_{z1} + \psi_{z2}) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{N} + \frac{4\pi}{N} \right) = \frac{3\pi}{N}$$

Calcoliamo allora il valore di F_N per $\psi = \psi_{s1}$.

$$|F_N(\psi_{s1})| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin\left(N\frac{3\pi}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2N}\right)} \right| \simeq \frac{1}{N} \left| \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2N}\right)} \right| \quad (7.40)$$

Se $N \gg 1$ si ha $\frac{3\pi}{2N} \ll 1$ e dunque $\sin\left(\frac{3\pi}{2N}\right) \simeq \frac{3\pi}{2N}$; l'equazione (7.40) diventa allora

$$|F_N(\psi_{s1})| \simeq \frac{1}{N} \frac{1}{\left(\frac{3\pi}{2N}\right)} = \frac{2}{3\pi} \simeq -13,5 \text{ dB} \quad (7.41)$$

Dalla (7.41) si può dedurre che, per N sufficientemente grande, il livello del lobo secondario non dipende né da N né da $\frac{d}{\lambda}$; cioè per una schiera di questo tipo non si riesce a controllare il livello dei lobi secondari. Ricordando che il diagramma d'irradiazione di una schiera è dato dal prodotto del fattore di schiera e del diagramma d'irradiazione del singolo elemento, si può pensare di utilizzare dei radiator elementari che abbiano un diagramma di irradiazione sufficientemente direttivo, per esempio l'antenna a tromba, che permette di diminuire il livello dei lobi secondari del fattore di schiera. Questo non sempre è possibile, anche perchè per essere direttivi gli elementi devono avere dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda, creando problemi (risolubili) con le dimensioni d/λ che evitano i GL.

Se gli elementi della schiera sono poco direttivi (dipoli, fessure etc..) allora è necessario agire direttamente sulla schiera, ossia modificare la distribuzione dell'eccitazione considerando cioè schiere non uniformi. Vediamo allora a grandi linee, alla luce di quanto detto sopra, l'effetto di questa distribuzione dei coefficienti di alimentazione (a_n) sul diagramma d'irradiazione. I coefficienti di alimentazione a_i si possono pensare come campioni (discreti) di una funzione (continua) $f(x)$, cioè $a_i = f(x_i)$. L'espressione del fattore di schiera che compare nella (7.6) è del tipo

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(x_i) e^{j\xi x_i}$$

che può rappresentare sia il fattore di schiera sia la versione discretizzata dell'integrale di irradiazione da un'apertura. Infatti quest'ultimo è dato da (rif. alla (6.27))

$$P_e(\hat{r}) \propto \int_{\Sigma_a} d\Sigma f(\underline{\rho}) e^{j\xi \rho} = F(\hat{r}) \quad (7.42)$$

dove $\xi = k_0 \hat{r} \cdot \hat{\rho}$. Consideriamo ora, per semplicità, il caso unidimensionale lungo $\hat{u}$, in cui avremo $\underline{\rho} = x \hat{u}$ e $f(\underline{\rho}) = f(x)$; la regione Σ_a diventa un intervallo $\gamma_a = [-a, a]$, cioè $f(x) \neq 0$ solo per $x \in [-a, a]$.

Se ora $f(x)$ è una sequenza di campioni

$$f[i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_i) \quad (7.43)$$

ricordando le proprietà della *delta di Dirac* e sostituendo la (7.43) nella (7.42) otteniamo il campionamento dell'integrale (7.42)

$$F(\hat{r}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(x_i) e^{jk_0 \hat{r} \cdot \hat{u} x_i} \quad (7.44)$$

Dato che $f(x_i) = 0$ per $x \notin [-a, a]$ la sommatoria nella (7.44) è limitata all'intervallo $i \in [0, N-1]$, cioè

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) e^{jk_0 \hat{r} \cdot \hat{u} x_i}$$

Un discorso analogo vale nel caso bidimensionale; ricordando infatti la definizione di *delta di superficie* data dalla (6.3), la sequenza di campioni sarà espressa da

$$f[i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\underline{\rho})\delta(\underline{\rho} - \underline{\rho}_i)$$

quindi anche in questo caso otterremo

$$F(\hat{r}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\underline{\rho}_i)e^{jk_0\hat{r}\cdot\underline{\rho}_i}$$

ed essendo $f(\underline{\rho}) = 0$ se $\underline{\rho}_i \notin \Sigma_a$ abbiamo $i \in [0, N-1]$. In questo caso quindi otteniamo il campionamento dell'integrale d'irradiazione.

La schiera può dunque essere considerata come il campionamento di una distribuzione continua: in particolare una schiera uniforme sarà il campionamento di una distribuzione uniforme.

Nel paragrafo (6.3.3) abbiamo visto, per un'antenna a tromba, l'effetto della “rastrematura” (tapering) ai bordi sul diagramma d'irradiazione. In quel caso infatti la funzione cosinusoidale dava luogo ad un involuppo della F_H del tipo $1/u^2$, e si avevano lobi secondari più bassi rispetto a quelli determinati dalla F_E , caratterizzata da un'involuppo del tipo $1/u$. In base

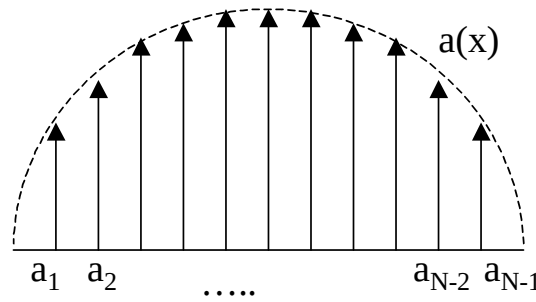


Figura 7.12. Distribuzione smussata (tapered) ai bordi.

alla relazione discussa sopra, se consideriamo una distribuzione dei coefficienti di alimentazione smussata verso i bordi della schiera (Fig. 7.12), si ottiene una schiera con una direttività minore rispetto al caso uniforme ma con lobi secondari più bassi. Consideriamo ora un caso semplice e significativo di schiera non uniforme: la schiera *binomiale*.

Inizialmente esaminiamo una schiera BS in cui si ha $\Phi = 0$. I coefficienti sono del tipo

$$a_n = \binom{N-1}{n}$$

Notiamo (Fig. 7.13) che questi sono caratterizzati da un “tapering” estremo, hanno infatti una decrescita che è pressoché esponenziale. Inoltre si può notare che, per N elevato, soltanto

pochi coefficienti a_n sono molto diversi da zero, e solo pochi elementi contribuiscono quindi in modo sensibile all'irradiazione. Ne segue che la “efficienza d'apertura” della schiera è bassa, e ci aspettiamo basso guadagno. D'altro canto la distribuzione dei coefficienti scende a zero in modo così “morbido” che la sua trasformata avrà un decadimento molto rapido, il che implica bassi lobi secondari.

Il fattore di schiera è sempre espresso dalla (7.9). Ponendo, come in quel caso, $\psi = k_0 d \cos \alpha$ e $t = e^{j\psi}$, possiamo scriverlo in forma chiusa; infatti

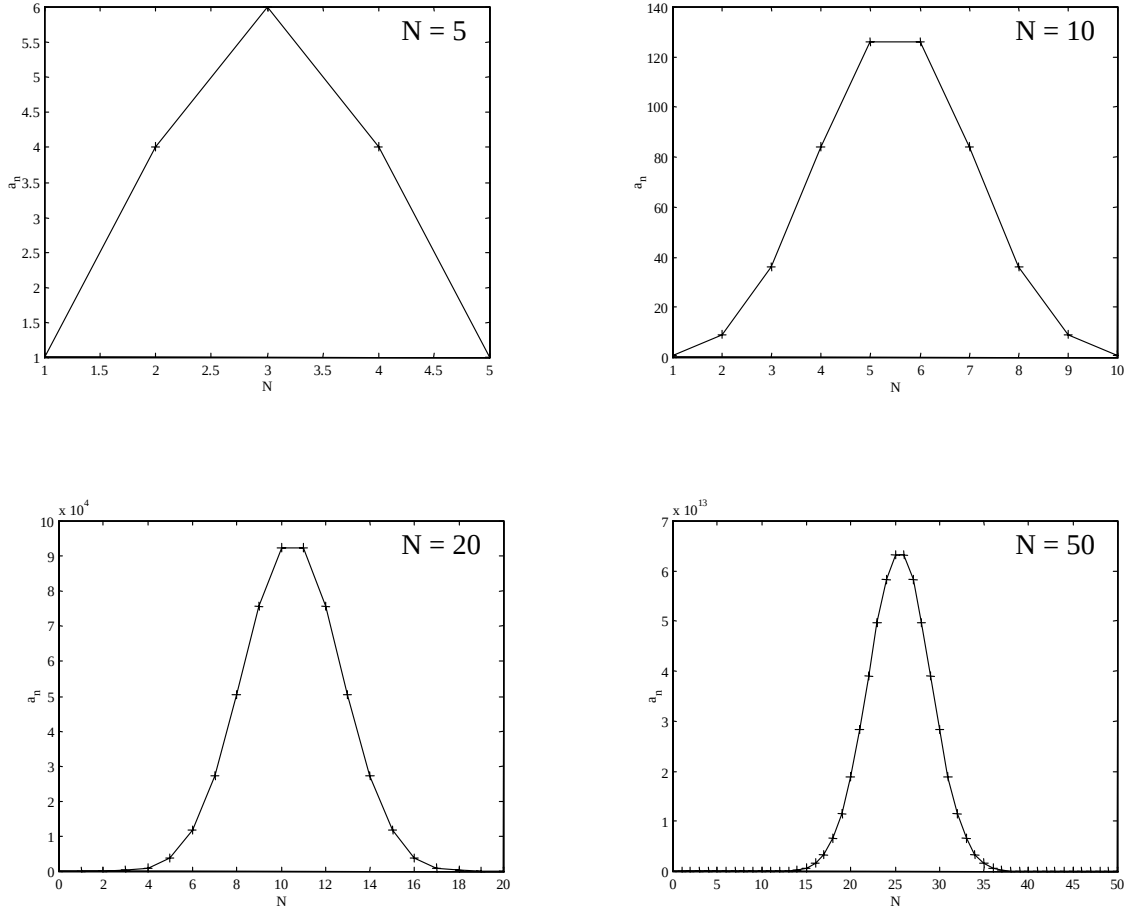


Figura 7.13. Forma dei coefficienti di eccitazione per le schiere binomiali.

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jk_0 d n \cos \alpha} = \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1}{n} t^n =$$

$$(1+t)^{N-1} = (1+e^{j\psi})^{N-1} \quad (7.45)$$

ovvero

$$F(\psi) = \left(e^{j\frac{\psi}{2}} 2 \cos \frac{\psi}{2} \right)^{N-1} \quad (7.46)$$

e

$$|F(\psi)| = 2^{N-1} \left| \cos \frac{\psi}{2} \right|^{N-1} \quad (7.47)$$

La versione normalizzata è data da

$$|F_N^{bin}(\psi)| = \left| \cos \frac{\psi}{2} \right|^{N-1} \quad (7.48)$$

La funzione $F(\psi)$ è periodica di periodo 4π , e gli zeri sono dati da $\psi_{zm} = m\pi$ con m dispari. Dal grafico, mostrato in Fig. 7.14, si può notare l'assenza di lobi secondari veri e propri e la

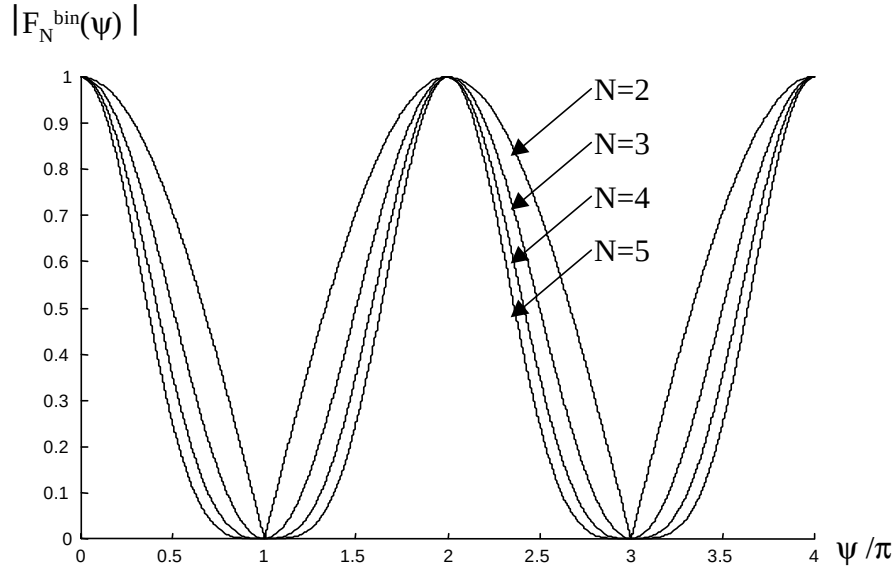


Figura 7.14. Grafico della funzione $|F_N^{bin}(\psi)|$.

presenza dei soli grating lobes (GL). Considerando

$$\psi_{max} = k_0 d < \pi$$

ovvero

$$\frac{d}{\lambda} \leq \frac{1}{2} \quad (7.49)$$

si ottiene un unico lobo (quello principale) la cui apertura angolare diminuisce al crescere di N e quindi la direttività (legata alla larghezza a 3dB) aumenta, come mostrato in Fig. 7.15. Se confrontiamo la (7.49) con la (7.28) notiamo che in questo caso la distanza d è indipendente dal numero di elementi N ed è minore di quella trovata nel caso di schiera uniforme BS (escludendo

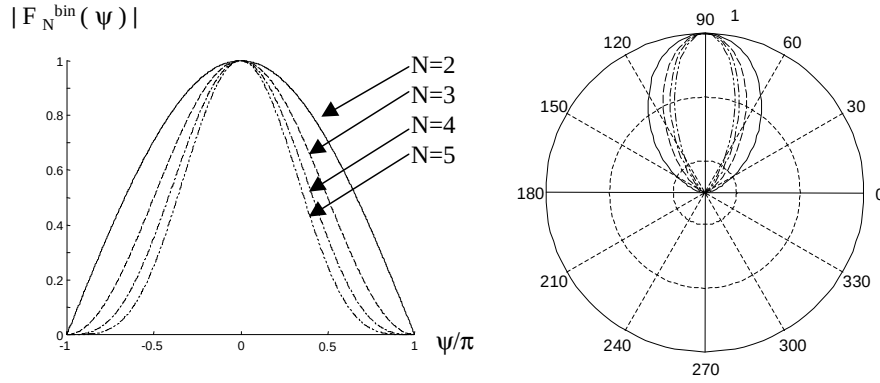


Figura 7.15. Fattore di schiera della schiera binomiale per $d/\lambda = 1/2$ (assenza di GL).

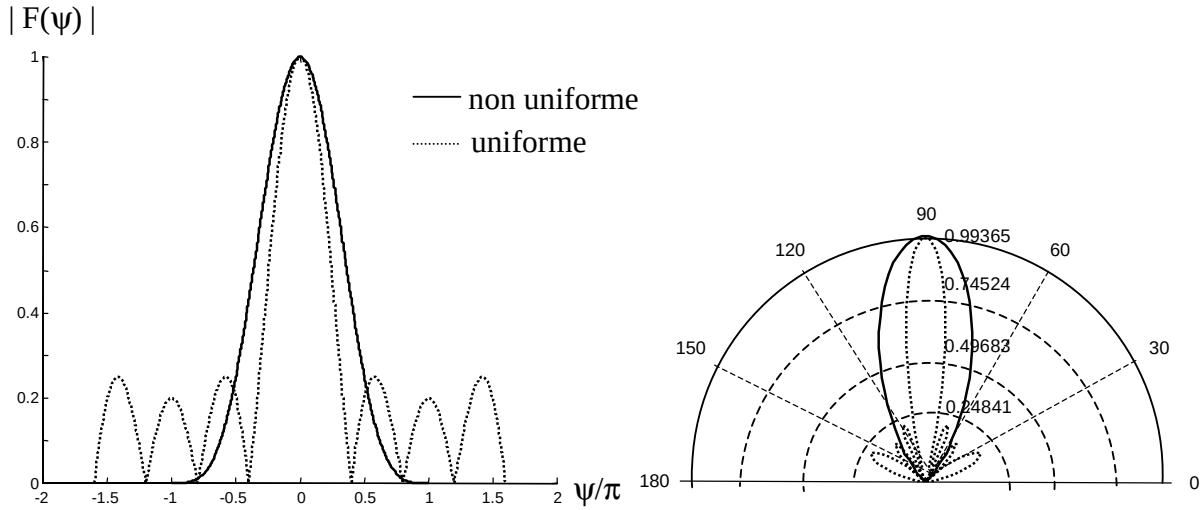


Figura 7.16. Confronto tra il caso non uniforme ($d/\lambda = 1/2$) e quello uniforme ($d/\lambda = 4/5$), con $N=5$.

il caso con N pari a 2 in cui coincidono). Il guadagno più elevato della schiera uniforme è anche dovuto alla maggiore spaziatura tra gli elementi.

Il grafico riportato in Fig. 7.16 mostra un confronto con la schiera uniforme, nel caso di spaziatura tra gli elementi tale da garantire assenza di GL sia per la schiera uniforme sia per quella non uniforme. Notiamo, come era prevedibile, che la schiera uniforme ha una direttività maggiore con lo svantaggio però che compaiono i lobi secondari che nel caso binomiale non troviamo.

Se ora consideriamo il caso $k_0 d > \pi$ (Fig. 7.17) vediamo che è possibile controllare il livello dei lobi secondari aumentando N o variando l'intervallo visibile. Quest'ultimo è dato da $\alpha \in [0, \pi]$ cioè $\psi \in [-k_0 d, k_0 d]$ e quindi aumenta all'aumentare del parametro d , sino ad includere parte dei GL. Fino a quando $k_0 d < 2\pi$, la parte di GL compresa nell'intervallo visibile determina ciò che verrà considerato "lobo secondario".

Possiamo ora tornare al confronto con la schiera uniforme; se rilassiamo il limite imposto

precedentemente sulla dimensione della schiera non uniforme ($d/\lambda = 1/2$) e accettiamo la presenza dei lobi secondari, che imponiamo abbiano un livello ad esempio pari a -20dB, notiamo (Fig. 7.18) che, nel caso non uniforme, la direttività è aumentata ma resta sempre comunque minore di quella della schiera uniforme (maggiore apertura angolare del lobo principale), anche a parità di numero di elementi e di spaziatura tra questi. Utilizzando la schiera non uniforme però abbiamo il vantaggio di poter imporre il livello dei lobi secondari desiderato (in questo caso -20dB).

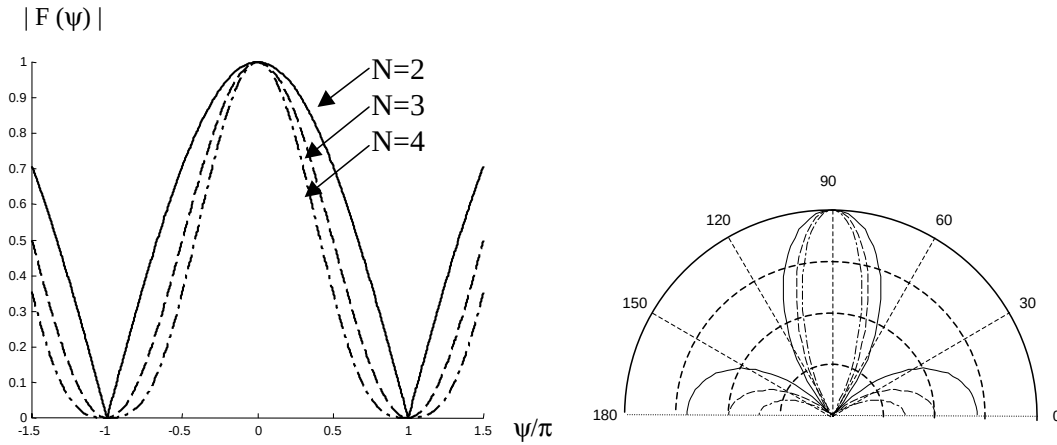


Figura 7.17. Fattore di schiera della schiera binomiale per $k_0 d, > \pi$ e $d/\lambda = 3/4$ (presenza di GL).

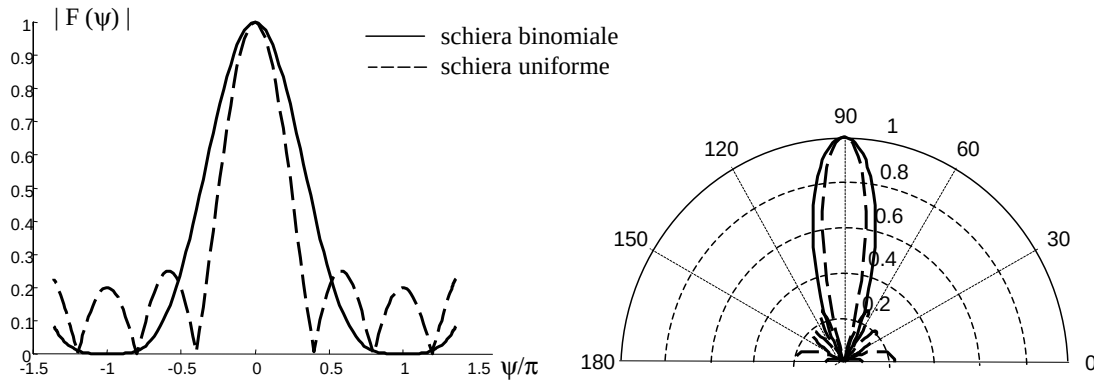


Figura 7.18. Confronto tra il caso non uniforme e quello uniforme ($d/\lambda = 0.7$), $N=5$.

Come nel caso di schiera uniforme, quello che determina la direzione di massima irradiazione è la fase dei coefficienti di eccitazione. Fino ad ora abbiamo considerato $\Phi = 0$ e quindi la direzione di massima irradiazione data da $\alpha_{max} = \frac{\pi}{2}$. Per orientare il fascio in altre direzioni basterà porre

$$a_n = A_n e^{jn\Phi}$$

con $A_n = \binom{N-1}{n}$. In questo caso si ha

$$\psi = k_0 d \cos \alpha + \Phi$$

quindi il fattore di schiera è sempre espresso dalla (7.47); quello che cambia è la direzione di massima irradiazione, quindi, variando ϕ è possibile effettuare la scansione del fascio (beam scanning).

7.4 Reti di alimentazione

Nello studio delle schiere si è visto il ruolo fondamentale dello sfasamento relativo Φ e delle ampiezze relative a_n tra i vari radiatori. Nella fase realizzativa della schiera, per riuscire ad ottenere le variazioni di fase volute tra i vari radiatori bisogna tenere conto dello sfasamento di propagazione tra un elemento e l'altro, termine non trascurabile e dipendente anche dalla frequenza. Infatti si cerca di avere d/λ maggiore possibile ($d/\lambda = (d/\lambda)_{critico}$) e se consideriamo la (7.35) si ha che $\frac{d}{\lambda} \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right)$, per una schiera BS, e $\frac{d}{\lambda} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N}\right)$, per una schiera EF; la distanza tra gli elementi non è quindi trascurabile rispetto a λ , perciò bisogna considerare lo sfasamento prodotto dalla rete che si utilizza per l'alimentazione. La rete di alimentazione (Beam Forming Network, BFN) più facile da realizzare è quella per le schiere broadside ($\Phi = 0$). Due tipiche reti, sono quelle ad *albero* (*corporate, equal-length*) e *serie* che vengono esaminate nel seguito.

7.4.1 Alimentazione ad albero (*corporate, equal-length*)

Caratteristica fondamentale dell'alimentazione *corporate* è l'uguaglianza dei tratti l_i che collegano il singolo radiatore con la porta di ingresso (feed point) $l_i = l \quad \forall i = 1, \dots, N$. Per soddisfare queste condizioni si utilizza una struttura ad albero (*corporate*) mostrata in Fig. 7.19. In questa struttura ci sono delle discontinuità che dipendono sia dai livelli di impedenza delle linee di trasmissione sia dalle discontinuità fisiche nelle strutture guidanti. Queste ultime, causate dalla realizzazione fisica dei nodi dell'albero che richiedono l'utilizzo di biforcazioni (Fig. 7.20), possono essere trascurate se ad esempio si considerano delle strutture che supportano il modo *TEM* quali linee bifilari o cavi coassiali.

Per evitare invece gli sfasamenti localizzati causati dai livelli di impedenza delle linee di trasmissione è possibile, ad esempio, adattare le impedenze di ingresso della rete. In questo modo, considerando un collegamento antenna-connettore si avranno solo onde progressive e quindi $\angle I_i = \beta l_i$, dove β è la parte reale della costante di propagazione. Avendo $l_i = l \quad \forall i = 1, \dots, N$ ed essendo

$$\Phi = \angle I_i - \angle I_{i-1}$$

si ottiene

$$\Phi = \beta l_i - \beta l_{i-1} = 0$$

ossia una differenza di fase nulla, realizzando quindi il caso BS.

Esaminiamo il caso di schiera uniforme e vediamo come realizzare l'adattamento. Consideriamo $Z_{\infty 1}$ l'impedenza della linea che collega le antenne tutte con impedenza pari a Z_a (Fig. 7.21).

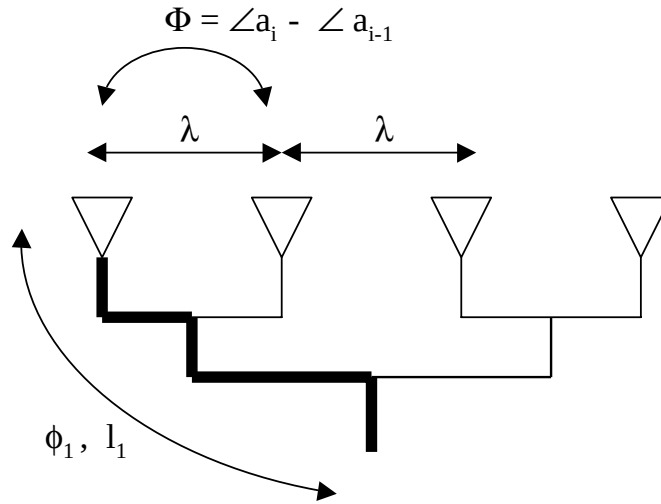


Figura 7.19. Rete di alimentazione equal-length .

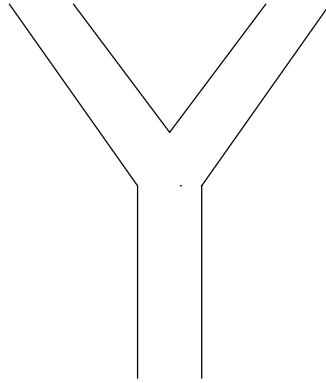


Figura 7.20. Esempio di realizzazione di biforcazioni .

Adattiamo le antenne alle singole linee di trasmissione ponendo $Z_a = Z_{\infty_1}$. Considerando il circuito equivalente mostrato in Fig. 7.22, appare chiaro che l'impedenza nella sezione B è data da

$$Z_B = Z_{\infty_1} \parallel Z_{\infty_1} = \frac{Z_a}{2} \quad (7.50)$$

Per adattare si pone quindi $Z_{\infty_b} = Z_B = \frac{Z_a}{2}$. Iterando questo ragionamento si ha che il livello di impedenza viene dimezzato ad ogni giunzione. Utilizzando questo tipo di adattamento ad ogni biforcazione anche la potenza viene ripartita in modo eguale (divisore a 3dB). In generale quindi si avrà

$$Z_{in} = \frac{Z_a}{2^n} \quad P_a = \frac{P_{in}}{2^n} \quad (7.51)$$

dove Z_{in} e P_{in} sono rispettivamente l'impedenza e la potenza alla porta di ingresso, P_a è la potenza di alimentazione all'antenna ed n è il numero di antenne (è facile realizzare ciò

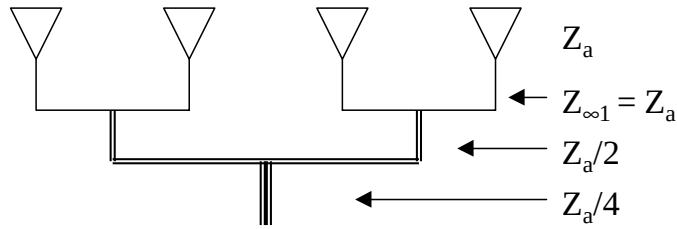


Figura 7.21. Rete di alimentazione adattata.

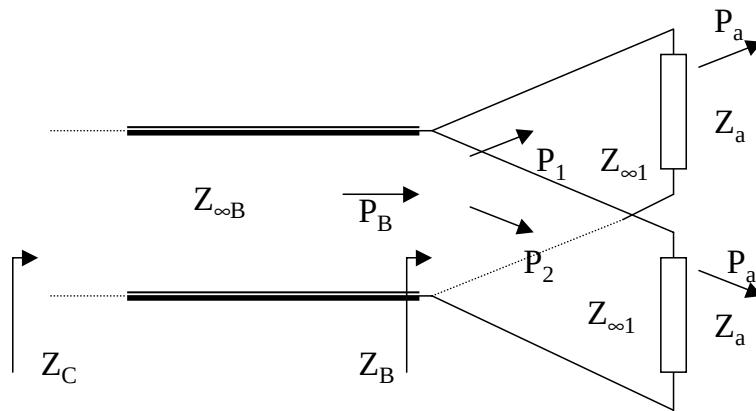
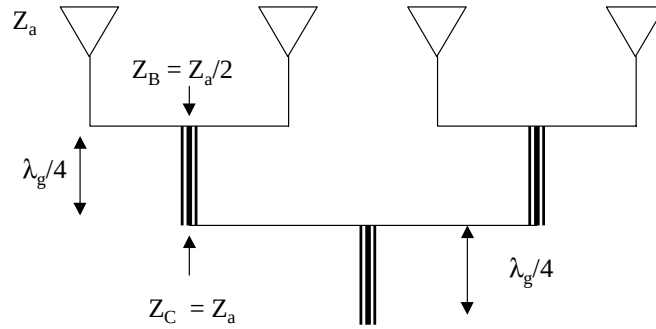


Figura 7.22. Circuito equivalente.

in microstriscia perchè la resistenza è inversamente proporzionale alla larghezza della striscia). L'impedenza d'ingresso Z_{in} è tanto più piccola quanto più è elevato il numero di antenne presenti nella schiera quindi, per avere un livello di impedenza di ingresso accettabile, si ha bisogno di una Z_a molto elevata. Questo crea dei problemi pratici di realizzazione. Si possono allora utilizzare degli adattatori a $\lambda/4$ (singola o multi cella) per rialzare i livelli di impedenza (Fig. 7.23). Per avere $Z_C = Z_a$ dobbiamo progettare l'adattatore con un'impedenza caratteristica pari a

$$Z_{\lambda_g/4} = \sqrt{Z_B \cdot Z_C} = \sqrt{Z_a \cdot \frac{Z_a}{2}} \quad (7.52)$$

Quindi introducendo i tratti $\lambda_g/4$ si riesce ad avere $Z_{in} = Z_a$ indipendentemente dal numero di antenne. L'adattatore però funziona effettivamente in questo modo quando lavora in condizioni

Figura 7.23. Utilizzo dell'adattatore $\lambda/4$.

di risonanza, ossia solo se $\lambda = \lambda_g$ (si ricorda che $\lambda_g \neq \lambda_0$, dove λ_g è la lunghezza d'onda guidata e λ_0 è la lunghezza d'onda nello spazio libero), quindi è un dispositivo a banda stretta. Per minimizzare questo problema si possono utilizzare più adattatori in cascata¹.

Nel caso in cui si abbia una schiera non uniforme, utilizzando impedenze diverse nelle biforcazioni, si riescono ad avere partizioni di potenza non uniformi. Considerando P_B la potenza di ingresso, P_1 e P_2 le potenze sulle due partizioni e Z_{∞_1} e Z_{∞_2} le impedenze delle linee utilizzate per le partizioni, si ha

$$P_1 = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \cdot P_B$$

$$P_2 = \frac{1}{\alpha + 1} \cdot P_B$$

dove $\alpha = \frac{Z_{\infty_1}}{Z_{\infty_2}}$

7.4.2 Alimentazione in cascata (Linea risonante)

Il circuito mostrato in Fig. 7.24 rappresenta una schematizzazione della rete di alimentazione in cascata. Le correnti $I_{s_1}, I_{s_2}, \dots, I_N$ rappresentano le alimentazioni delle N antenne tutte con impedenza pari a Z_s , $Z_{s_i} = Z_s$ $i = 1, \dots, N$. Dopo l'ultima antenna c'è un circuito aperto, spesso realizzato in guida con un tratto di linea $\lambda_g/4$ che termina con un cortocircuito. Ricordando che un tratto di linea lungo $\lambda_g/2$ non modifica il valore dell'impedenza (si compie un giro completo sulla Carta di Smith), facendo riferimento alla Fig 7.24, si ha

$$Z_i = \frac{Z_s}{N - i}$$

¹F.Canavero,I.Montrosset,R.Orta *Linee di trasmissione*, Levrotto e Bella, Torino,1990; par 1.3.1

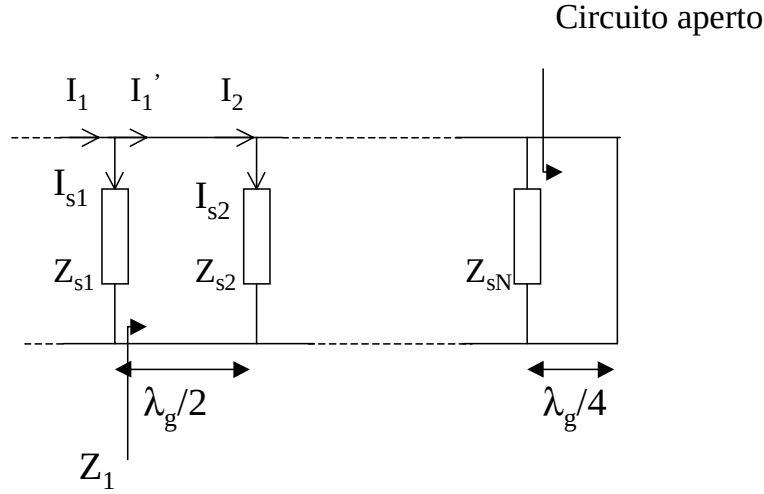


Figura 7.24. Circuito equivalente per la rete di alimentazione in cascata.

e, usando il partitore di corrente

$$I_{s_i} = I_i \frac{G_s}{G_s + G_i}$$

Quindi, nel caso $i = 1$ si ha

$$Z_1 = \frac{Z_s}{N-1} \quad I_1 = \frac{I_1}{N} \quad I_1' = I_1 \frac{N-1}{N}$$

Ricordando che un tratto di linea pari a $\lambda_g / 2$ provoca uno sfasamento di π per le correnti e le tensioni si ottiene

$$I_{s_2} = -\frac{I_1}{N}$$

Iterando questo ragionamento si dimostra che tutte le correnti di alimentazione sono uguali in modulo ma con uno sfasamento pari a π :

$$I_{s1} = -I_{s2} = I_{s3} \cdots ecc$$

e quindi

$$\Phi = \angle I_n - \angle I_{n-1} = \pi$$

La schiera, alimentata in questo modo, non sarebbe più di tipo BS, quindi bisogna trovare il modo di invertire le fasi. Se per la realizzazione fisica si utilizzano ad esempio le linee bifilari, un metodo per invertire le fasi relative è quello di usare un “twisting” detto “criss-cross” (Fig. 7.25) che permette di compensare lo sfasamento. La rete di alimentazione in cascata si può realizzare non solo con le linee bifilari ma anche, ad esempio, in guida d’onda; in questo caso come antenne elementari vengono tipicamente utilizzate le fessure (Fig. 7.26). Come si è visto (vedi pag. 107, *Antenna a fessura*) la fessura viene “sostituita” con il metallo, sul quale sono presenti

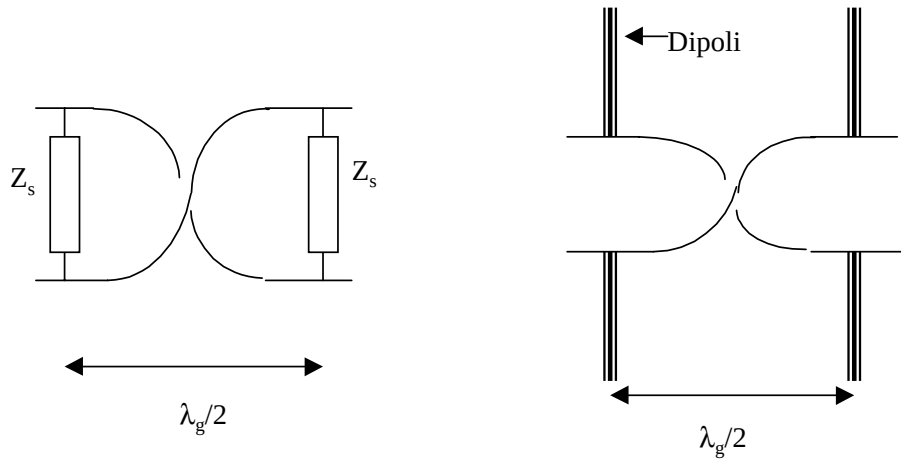


Figura 7.25. Esempio di utilizzo di “Criss-cross”, a sinistra: il circuito equivalente; a destra: esempio di realizzazione pratica.

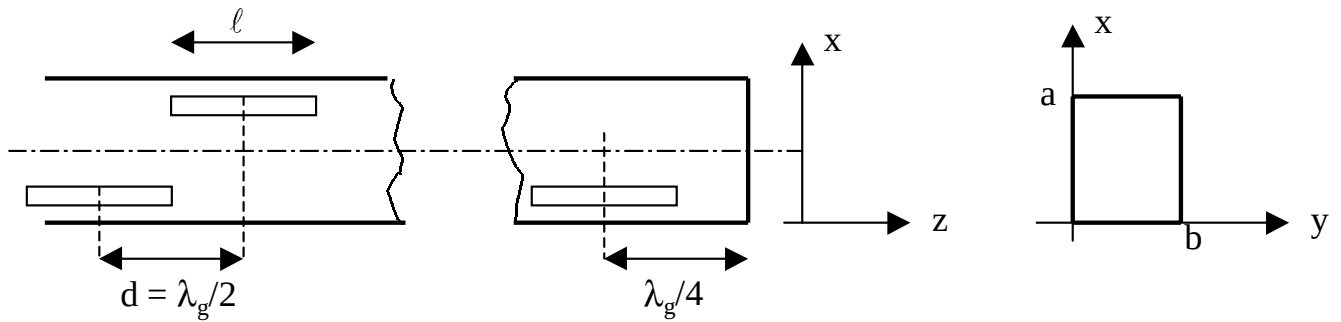


Figura 7.26. Schiera realizzata mediante fessure in una guida d'onda.

le sole correnti magnetiche. Per il modo fondamentale, se si considerano due fessure identiche, poste ad una distanza s dalla mezzeria, in posizione simmetrica (si veda Fig. 7.27(a)), si può mostrare che (riferimento al libro di antenne) le correnti magnetiche risultano in opposizione di fase, quindi

$$\Delta\phi_s = \angle I_{n1} - \angle I_{n2} = \pi$$

Se in più poniamo le fessure ad una distanza $d = \frac{\lambda_g}{2}$ come mostrato in Fig. 7.27(b) si ha un ulteriore sfasamento

$$\Delta\phi_d = \pi$$

Complessivamente lo sfasamento relativo Φ tra le due correnti magnetiche è dato da (fig. 7.27(c))

$$\Phi = \angle a_n - \angle a_{n-1} = \Delta\phi_s + \Delta\phi_d = 2\pi$$

In questo modo si realizza una schiera di tipo BS.

Se $\frac{s}{\lambda} \ll 1$ si ottiene una schiera che può essere considerata unidimensionale (lineare), altrimenti si ha una composizione di due schiere. Infine si noti che, utilizzando questo tipo di alimenta-

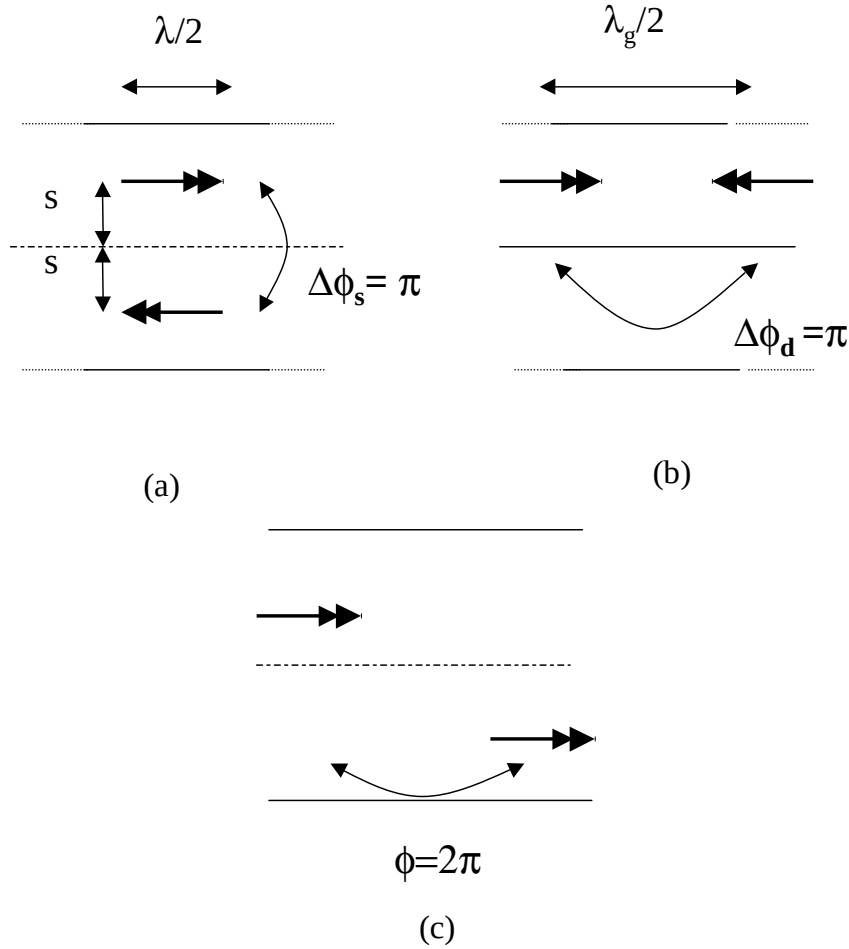


Figura 7.27. (a),(b),(c) Sfasamenti tra le correnti equivalenti delle fessure in guida.

zione, la distanza tra due antenne della schiera non è più un parametro libero ma, nel caso di schiera BS, risulta essere fissato al valore $d = \frac{\lambda_g}{2}$.

7.5 Schiere planari: caso cartesiano separabile

Nel caso di schiere planari non ci sono in genere grandi semplificazioni rispetto al caso generale della formula del fattore di schiera in (7.6). Esiste però un analogo del semplice caso lineare visto nei paragrafi 7.2 7.2.1. Consideriamo innanzitutto il caso di una schiera planare rettangolare con i radiatori disposti nei nodi di un reticolo *cartesiano*, cioè con $\underline{r}_i = m d_x \hat{x} + n d_y \hat{y}$; ($i \rightarrow (m, n)$) dove $m = 0, \dots, (M_x - 1)$, $n = 0, \dots, (M_y - 1)$ e $N = M_x M_y$ (vedi Fig. 7.28) per cui il fattore di

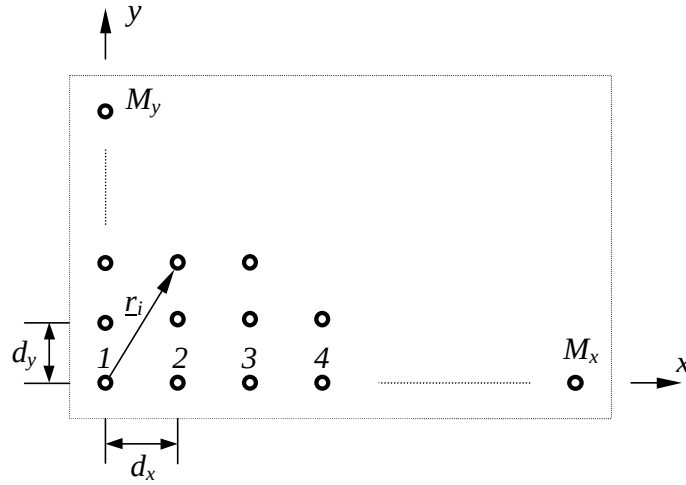


Figura 7.28. Schiera planare rettangolare cartesiana.

schiera $F(\hat{r})$ diventa

$$F(\hat{r}) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{jk_0 \hat{r} \cdot \mathbf{r}_i} = \sum_{m=0}^{M_x-1} \sum_{n=0}^{M_y-1} a_{(m,n)} e^{jk_0 (um d_x + vnd_y)} \quad (7.53)$$

con

$$u = \hat{r} \cdot \hat{x} \quad , \quad v = \hat{r} \cdot \hat{y} \quad (7.54)$$

Questa formula si semplifica se la distribuzione $\{a_i\}$ dei coefficienti di eccitazione è “separabile”, cioè se vale l’assunzione

$$a_i = a_{mn} = a_m^x a_n^y \quad (7.55)$$

In tal caso allora il fattore di schiera diventa

$$F(\hat{r}) = F(u, v) = F_x(u) F_y(v) \quad (7.56)$$

con

$$F_x(u) = \sum_{m=0}^{M_x-1} a_m^x e^{jk_0 u m d_x} \quad (7.57)$$

$$F_y(v) = \sum_{n=0}^{M_y-1} a_n^y e^{jk_0 v n d_y} \quad (7.58)$$

cioè il fattore di schiera di una schiera planare cartesiana separabile è il prodotto di due fattori di schiera lineari.

Per fare un esempio, se la schiera giace nel piano xy , ($\hat{z}$ è la normale al piano della schiera) si ha che

$$u = \hat{r} \cdot \hat{x} = \sin \theta \cos \phi \quad v = \hat{r} \cdot \hat{y} = \sin \theta \sin \phi \quad (7.59)$$

Si noti che per il campo irradiato dalla schiera, da (7.7), e con (7.56), abbiamo che

$$\underline{P}_e(\hat{r}) = \underline{P}_{e0}(\hat{r}) F_x(\hat{r}) F_y(\hat{r}) \quad (7.60)$$

ed il diagramma di irradiazione può essere interpretato come quello di una schiera lineare ($1D$) i cui radiatori elementari sono a loro volta delle schiere lineari; per esempio, scrivendo

$$\underline{P}_{e0}^x(\hat{r}) \equiv \underline{P}_{e0}(\hat{r}) F_x(\hat{r}) \quad (7.61)$$

$$\underline{P}_e(\hat{r}) = \underline{P}_{e0}^x(\hat{r}) F_y(\hat{r}) \quad (7.62)$$

ovvero: una schiera lineare con allineamento lungo y (e fattore di schiera $F_y(\hat{r})$) i cui radiatori elementari sono ciascuno una schiera lineare con allineamento lungo x e fattore di schiera $F_x(\hat{r})$. Ovviamente si possono scambiare i ruoli di F_x e F_y e la conseguente interpretazione. Un esempio di quanto sopra è mostrato nelle Figg. 7.29 e 7.30. Nel caso in cui la schiera sia

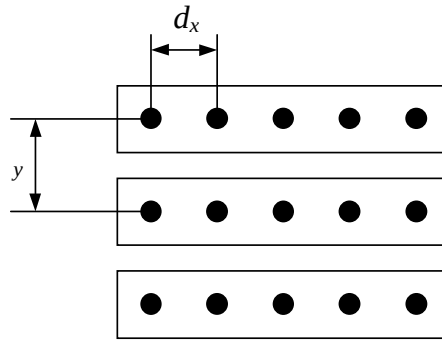


Figura 7.29. Schiera planare separabile.

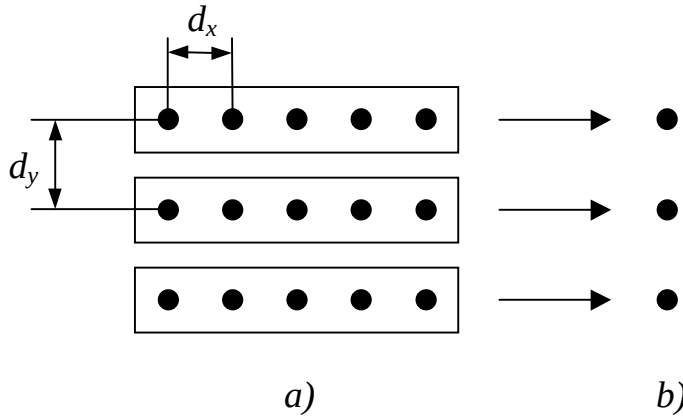


Figura 7.30. a) Schiera planare; b) schiera lineare equivalente.

uniforme, cioè $|a_i| = \text{cost.}$ e a sfasamento relativo costante, cioè

$$a_n^y = e^{jn\Phi_y} \quad , \quad a_m^x = e^{jm\Phi_x} \quad (7.63)$$

si ottiene che il fattore di schiera totale F è il prodotto di due fattori F^x e F^y del tipo già visto in (7.57).

7.5.1 Esempio di rete di alimentazione

Abbiamo visto che il diagramma di irradiazione di una schiera planare si può interpretare come quello di una schiera unidimensionale i cui radiatori elementari sono delle schiere lineari; questo permette una semplificazione della rete di alimentazione. Nel paragrafo 7.4 sono state presentate le reti di alimentazione *corporate* e *serie*; in questo caso possiamo combinare questi due tipi di alimentazione come mostrato dalla Fig. 7.31.

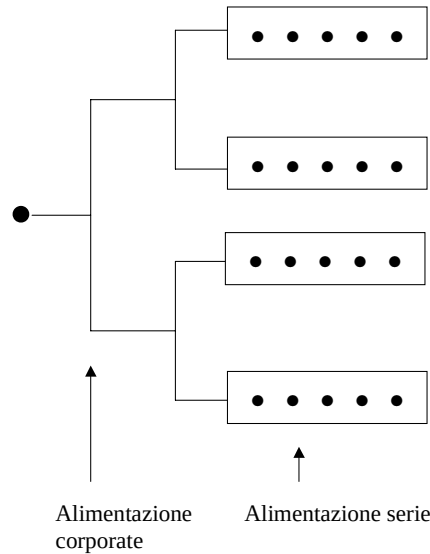


Figura 7.31. Esempio di rete di alimentazione nel caso di schiera planare.

Con riferimento alla figura precedente e alle formule (7.61) e (7.62), si ha un'alimentazione *corporate* per la schiera lineare equivalente disposta lungo $\hat{y}$ con fattore di schiera $F_y(\hat{r})$ e radiatori elementari con diagramma di irradiazione $\underline{P}_{e0}^x(\hat{r})$; mentre si ha un'alimentazione *serie* per i radiatori elementari composti da una schiera lineare con allineamento lungo $\hat{x}$.

7.5.2 Esempi di antenne equivalenti a schiere planari separabili

Alcune antenne di uso comune non sono apparentemente delle schiere planari, ma per la presenza in esse di riflettori piani possono essere trattate approssimativamente come delle schiere planari in virtù del teorema delle immagini.

Un primo esempio è quello di una schiera lineare, per esempio di dipoli, affacciata ad un piano metallico, come in Fig. 7.32a; trascurando la finitezza della piastra metallica, per il teorema delle immagini si ottiene la schiera planare di Fig. 7.32b; si noti che i dipoli (elettrici) immagine hanno la stessa ampiezza di quelli reali, ma fase opposta, e quindi la schiera lungo x ha $M_x = 2$, $d_x = 2h$, $|a_m^x| = 1$ e $\Phi_x = \pi$. Ovviamente il diagramma di irradiazione ottenuto è valido (approssimato) nel solo semispazio “fisico”, nella Fig. 7.32 quello per $x \geq 0$; al di fuori di tale regione angolare il modello approssimato (con il piano infinito) prevede campo nullo, e nella realtà ci saranno invece i contributi di diffrazione dai bordi della piastra.

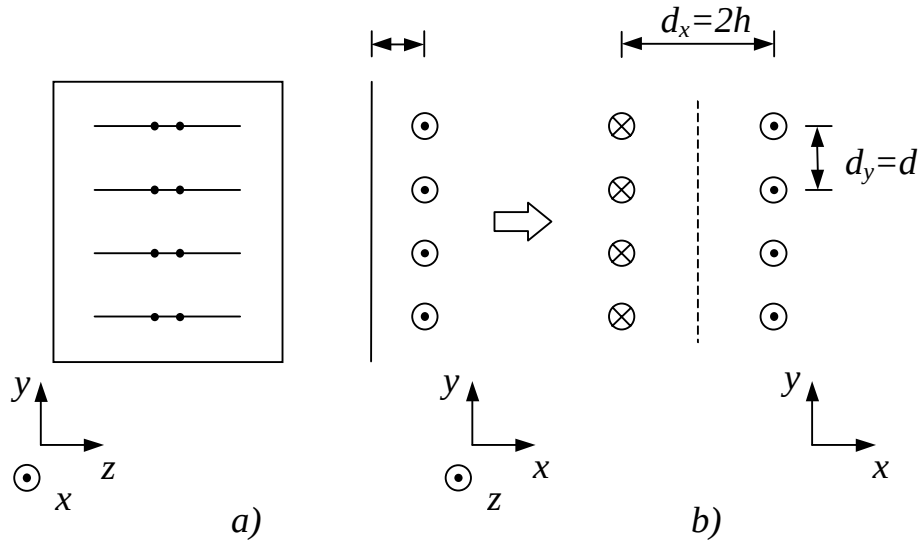


Figura 7.32. a) Schiera con pannello riflettente; b) schiera planare equivalente ottenuta dall'applicazione del teorema di equivalenza assumendo la piastra come infinita.

Un altro esempio è quello della cosiddetta antenna a *corner reflector* mostrata in Fig. 7.33a per il caso semplice di radiatore a dipolo. Il riflettore questa volta è un diedro metallico, che

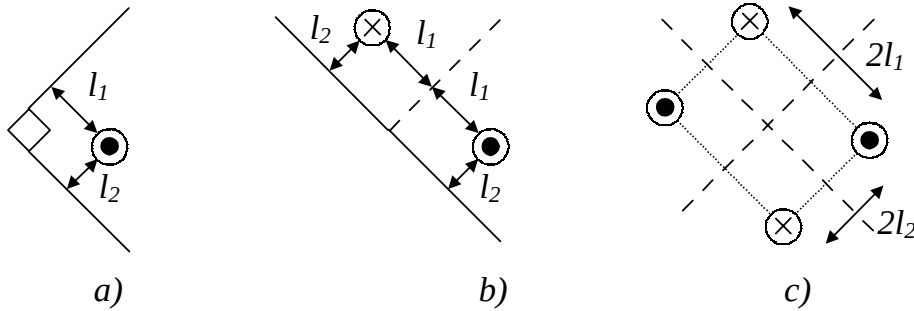


Figura 7.33. Antenna *corner reflector*. a) Configurazione reale; b) dopo la prima applicazione del teorema di equivalenza e c) dopo la seconda.

Nella figura è rappresentato il caso più semplice di diedro ad angolo retto.

se considerato infinito dà luogo alle immagini mostrate in Fig. 7.33b,c, si noti che il teorema va applicato prima ad una faccia (qualunque) del diedro (Fig. 7.33b) e poi alla configurazione risultante. Prendendo gli assi come in Fig. 7.33c, si ha $M_x = M_y = 2$, $d_x = 2l_2$, $d_y = 2l_1$, $|a_{mn}| = 1$ e $\Phi_x = \Phi_y = \pi$. In genere le antenne reali non hanno come piano riflettore una piastra elettrica piena ma si montano dei reticolati metallici dove i buchi hanno dimensioni almeno dieci volte più piccole della lunghezza d'onda; in questo modo dal punto di vista elettromagnetico la piastra risulta essere piena e dal punto di vista meccanico si ha il grosso vantaggio del peso inferiore.

8

Bilancio energetico in un collegamento radio in spazio libero

8.1 Equazione della trasmissione (formula di Friis)

Dato un sistema di trasmissione in cui si utilizzano due generiche antenne, consideriamo i circuiti equivalenti in RX e in TX come mostrato nelle Figg. 8.1 e 8.2. L'obiettivo che ci

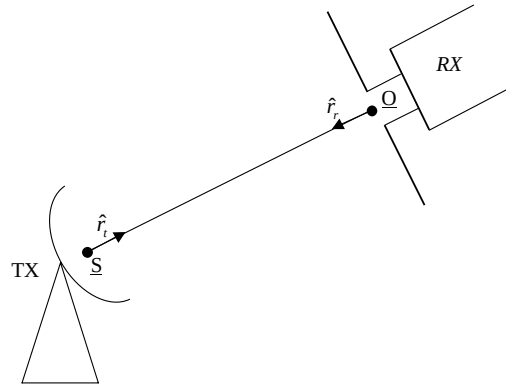


Figura 8.1. Sistema con due antenne in TX e RX.

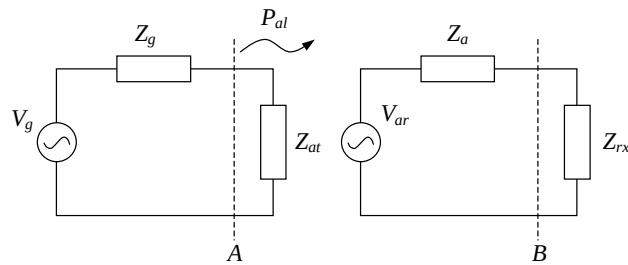


Figura 8.2. Equivalente circuitale in TX e RX.

poniamo è quello di determinare il rapporto

$$\frac{P_{disp}^{(r)}}{P_{al}^{(t)}}$$

dove $P_{disp}^{(r)}$ è la potenza disponibile ai morsetti dell'antenna in RX (cioè che verrebbe fornita al carico ricevente se questo fosse adattato energeticamente) e $P_{al}^{(t)}$ la potenza di alimentazione in TX, cioè quella erogata all'antenna in TX. Utilizzando i risultati ottenuti nel paragrafo 4.1.2 (vedi (4.11) e (4.18)) possiamo scrivere

$$P_{disp}^{(r)} = \frac{1}{2} \frac{|\underline{h}_e^{(r)}|^2 |\underline{E}^{inc}|^2}{4R_a} \chi = a_{eq}(\hat{r}_r) \left(\frac{dP}{d\Sigma} \right)_{inc} \chi \quad (8.1)$$

dove χ rappresenta il *disadattamento di polarizzazione*, dato da

$$\chi \equiv |\hat{p}_r(\hat{r}_r) \cdot \hat{p}_t(\hat{r}_t)|^2 \quad (8.2)$$

dove

- $\hat{p}_r(\hat{r}_r)$ è il versore di polarizzazione dell'antenna ricevente;
- $\hat{p}_t(\hat{r}_t)$ è il versore di polarizzazione dell'antenna trasmittente,

entrambi valutati nella direzione del collegamento, che è $\hat{r}_r$ per l'antenna che riceve e $\hat{r}_t$ per l'antenna in trasmissione, cioè, rispetto a Fig. 8.2 $\hat{r}_t = \frac{\underline{Q} - \underline{S}}{|\underline{Q} - \underline{S}|}$ e $\hat{r}_r = \frac{\underline{S} - \underline{Q}}{|\underline{S} - \underline{Q}|}$, ovvero $\hat{r}_t = -\hat{r}_r$.

Supponendo che nel collegamento via etere non vi siano perdite dovute ad assorbimento atmosferico, possiamo scrivere

$$\left(\frac{dP}{d\Sigma} \right)_{inc} = \left(\frac{dP}{d\Sigma} \right)_{irr} \quad (8.3)$$

con $\left(\frac{dP}{d\Sigma} \right)_{irr}$ densità di potenza irradiata dall'antenna trasmittente. Per l'antenna in trasmissione vale la relazione (vedi (3.13))

$$\left(\frac{dP}{d\Sigma} \right)_{irr}^{(t)} = g_t(\hat{r}_t) \frac{P_{al}^{(t)}}{4\pi r^2} \quad (8.4)$$

per cui si giunge ad una nuova espressione per la $P_{disp}^{(r)}$

$$P_{disp}^{(r)} = P_{al}^{(t)} g_t(\hat{r}_t) \frac{1}{4\pi r^2} a_{eq}^{(r)}(\hat{r}_r) |\hat{p}_r(\hat{r}_r) \cdot \hat{p}_t(\hat{r}_t)|^2 \quad (8.5)$$

Sfruttando infine la (4.73) l'equazione della trasmissione (8.5) diviene

$$P_{disp}^{(r)} = P_{al}^{(t)} g_t(\hat{r}_t) g_r(\hat{r}_r) A_{fs} |\hat{p}_r(\hat{r}_r) \cdot \hat{p}_t(\hat{r}_t)|^2 \quad (8.6)$$

dove

$$A_{fs} \equiv \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \ll 1 \quad (8.7)$$

Nel seguito indicheremo semplicemente con $\hat{r}$ la direzione del collegamento, intendendo che sia $\hat{r}_r$ o $\hat{r}_t$ a seconda che si tratti di un parametro definito per l'antenna in ricezione o per quella in trasmissione.

Il termine A_{fs} è detto *attenuazione di spazio libero* (free-space), attenuazione dovuta al fattore di onda sferica e non all'assorbimento (non ci sono perdite). L'equazione della trasmissione così ottenuta viene detta *formula di Friis* o *equazione della trasmissione in senso stretto*

$$P_{disp}^{(r)} = P_{al}^{(t)} g_r(\hat{r}) G_t A_{fs} \chi \quad (8.8)$$

Si possono dare le seguenti interpretazioni alla formula:

- Il rapporto $\frac{P_{disp}^{(r)}}{P_{al}^{(t)}}$ è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza. È importante sottolineare che il decadimento algebrico della potenza ricevuta rispetto a quella trasmessa non è da attribuire ad un assorbimento (trasformazione in calore) nello spazio libero, ma alla presenza di un fattore di attenuazione di onda sferica. Il trasmettitore, infatti, irradia la potenza in tutte le direzioni dello spazio. Pertanto per ricoprire una superficie che cresce come il quadrato della distanza la densità di potenza deve diminuire in modo proporzionale. La ricezione interessa solo una limitata porzione dello spazio in cui è stato irradiato il campo. Se si supponesse di ricoprire l'intera regione in cui è presente il campo con antenne riceventi, la somma delle potenze ricevute dai singoli utilizzatori equivarrebbe alla potenza trasmessa dalla sorgente.
- I parametri $g_t(\hat{r})$, $g_r(\hat{r})$ e $a_{eq}(\hat{r})$ esprimono la direttività dell'antenna, rispettivamente in trasmissione e in ricezione. Il fine di un apparato di trasmissione-ricezione dovrà essere quello di massimizzare i due parametri nella direzione $\hat{r}$ del collegamento per compensare (per quanto possibile) il decadimento $\propto 1/R^2$ della potenza.
- La conoscenza di $\frac{P_{disp}^{(r)}}{P_{al}^{(t)}}$ permette un confronto tra la propagazione via etere e quella guidata (quando questo abbia un senso, ovvero se entrambe le tecniche possono essere impiegate per un dato collegamento). Per la propagazione guidata si ha

$$\frac{P_{disp}^{(r)}}{P_{al}^{(t)}} \propto e^{-2\alpha r} \quad (8.9)$$

essendo α l'attenuazione della struttura guidante (cavo coassiale, guida metallica, fibra ottica). Si tratta di confrontare un decadimento esponenziale con uno quadratico: appare evidente che il confronto può essere vantaggioso per l'una o per l'altra tecnica a seconda del valore assunto dal coefficiente di attenuazione α , ovvero a seconda della struttura guidante (“supporto trasmissivo”).

Vediamo ora alcuni complementi di uso pratico. L'utente, nel momento in cui riceve, non conosce le prestazioni dell'antenna in TX, ma è interessato al valore del prodotto $P_{al}^{(t)} g_t$. Questo termine viene chiamato *Equivalent Isotropic Radiated Power*, cioè *EIRP*

$$\text{EIRP} \equiv P_{al} g_t(\hat{r}) \quad (8.10)$$

perché corrisponde alla potenza di alimentazione di un radiatore isotropico ($g = 1$) necessaria per avere la stessa $\frac{dP}{d\Omega}$. Spesso nella pratica è conveniente esprimere l'equazione della trasmissione in unità logaritmiche, per cui

$$P_{\text{dBW}} \equiv 10 \log_{10} \frac{P}{1 \text{ W}} \quad (8.11)$$

A fianco del dBW si usa anche il dBmW, abbreviato in dBm

$$P_{\text{dBm}} \equiv 10 \log_{10} \frac{P}{1 \text{ mW}} \quad (8.12)$$

legato al dBW dalla relazione

$$P_{\text{dBm}} = P_{\text{dBW}} - 30 \text{ dB} \quad (8.13)$$

Misurando tutte le grandezze in dB si ottiene per l'equazione della trasmissione la seguente forma:

$$\left(P_{\text{disp}}^{(2)}\right)_{\text{dBW}} = \left(P_{\text{al}}^{(1)}\right)_{\text{dBW}} + (g_t)_{\text{dB}} + (g_r)_{\text{dB}} - \alpha_{fs} - \alpha_{pol} \quad (8.14)$$

oppure

$$\left(P_{\text{disp}}^{(2)}\right)_{\text{dBW}} = (\text{EIRP})_{\text{dBW}} + (g_r)_{\text{dB}} - \alpha_{fs} - \alpha_{pol} \quad (8.15)$$

dove $\alpha_{fs} \equiv 10 |\log_{10} A_{fs}|$ e $\alpha_{pol} \equiv 10 |\log_{10} \chi|$.

8.2 Adattamento di polarizzazione

8.2.1 Direzione di osservazione e incidenza

Notiamo in primo luogo che il risultato della simmetria ricezione-trasmissione (dovuta alla reciprocità) fa sì che in ricezione la direzione $\hat{r}$ in $\underline{h}(\hat{r})$ indichi la direzione in cui è presente la sorgente (lontana) che emette il campo incidente sull'antenna in ricezione; pertanto in ricezione $\hat{r}$ in $\underline{h}(\hat{r})$ è opposto alla direzione di incidenza.

Data l'equivalenza $\underline{h}^R(\hat{r}) = \underline{h}^T(\hat{r})$, la polarizzazione di un'antenna in ricezione è quella del campo irradiato nella direzione $\hat{r}$ dalla stessa antenna quando trasmette. Per esempio la polarizzazione di un dipolo lungo $\hat{z}$ (vedi fig. 8.4) è $\hat{p} = \hat{\theta}$ e quindi in ricezione $\hat{p}_r$ del dipolo è $\hat{p}_r = \hat{\theta}$ (e non $\hat{z}$ come a volte parrebbe di intuire; è invece $\hat{p} = \hat{z}$ solo per $\theta = \pi/2$).

8.2.2 Polarizzazione non lineare

Quando la polarizzazione non è lineare, il termine $\chi = |\hat{p}_r \cdot \hat{p}_t|^2$ richiede qualche commento; per semplicità consideriamo il caso più importante, quello di polarizzazione circolare; sempre per semplicità disponiamo la direzione del collegamento lungo l'asse $\hat{z}$, e prendiamo

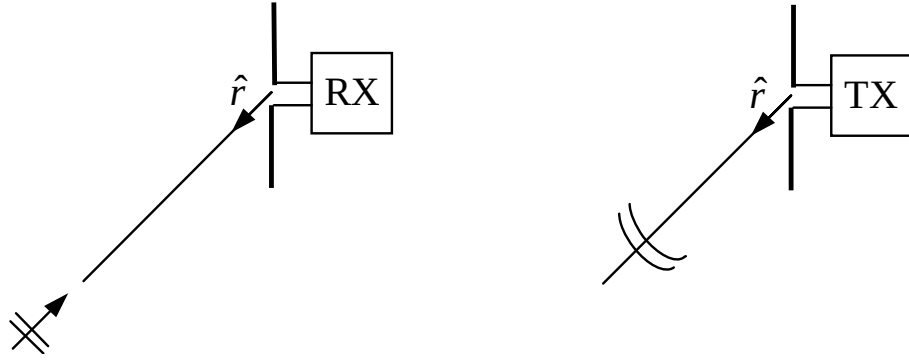


Figura 8.3. Antenna in trasmissione e ricezione.

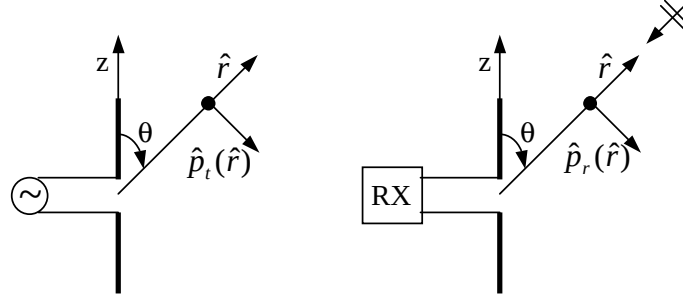


Figura 8.4. Esempio di polarizzazione in trasmissione e in ricezione: caso del dipolo.

$\hat{p}_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - j\hat{y})$; ora se $\hat{p}_r = \hat{p}_t$ si ha che

$$\chi(\hat{z}) = |\hat{p}_r \cdot \hat{p}_t|^2 = \frac{1}{2}|(\hat{x} - j\hat{y}) \cdot (\hat{x} - j\hat{y})|^2 = 0$$

viceversa, se $\hat{p}_r$ e $\hat{p}_t$ rappresentano due polarizzazioni circolari opposte, $\hat{p}_r = \hat{p}_t^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + j\hat{y})$, si ha adattamento di polarizzazione:

$$\chi(\hat{z}) = |\hat{p}_r \cdot \hat{p}_t|^2 = \frac{1}{2}|(\hat{x} + j\hat{y}) \cdot (\hat{x} - j\hat{y})|^2 = 1$$

A tutta prima questo può apparire sorprendente, ma il paradosso scompare se si considera il significato fisico-geometrico. Se prendiamo due antenne con identica polarizzazione quando sono nello stesso punto ed *orientate nello stesso modo*, una di esse deve essere *ruotata* per arrivare alla configurazione di antenne affacciate in fig. 8.5: questo rovescia il verso (orario/antiorario) della polarizzazione. Quindi $\hat{p}_r = \hat{p}_t^*$ vuol dire due antenne che avrebbero identica polarizzazione (per esempio antioraria) se fossero connesse allo stesso modo al connettore d'uscita del trasmettitore.

Ci si può convincere matematicamente di questo partendo dalla fig. 8.6 che mostra due antenne identiche di cui una (la numero 2) è stata ruotata in modo da essere affacciata all'altra (la numero 1), così come si avrebbe se la numero 2 fosse disposta per ricevere il campo irradato dalla numero 1. Chiamiamo $(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)})$ il sistema (cartesiano) di riferimento proprio dell'antenna numero i . Per un punto di osservazione $\underline{P}$ sull'asse dell'antenna 1 $\hat{r} = \hat{u}_3^{(1)} = \hat{z}$

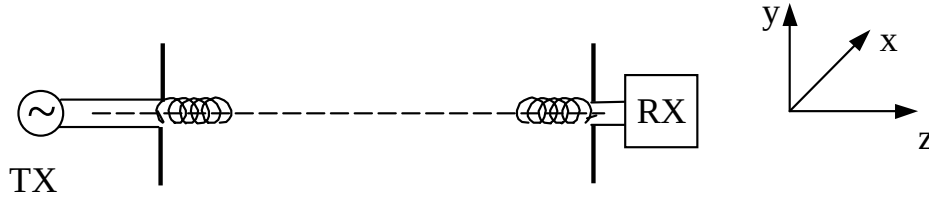


Figura 8.5. Sistema di due antenne affacciate.

la polarizzazione del campo irradiato dall'antenna 1 è $\hat{p}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{u}_1^{(1)} + j\hat{u}_2^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{x} + j\hat{y})$ e ovviamente non ruota, rispetto al riferimento proprio, quando l'antenna è ruotata. Si noti che la polarizzazione, espressa rispetto al sistema di riferimento solidale con l'antenna, non muta se l'antenna stessa viene ruotata. L'antenna 2 è la 1 ruotata, e quindi il sistema di riferimento solidale ad essa è $(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)})$, con $u_1^{(2)} = -u_1^{(1)}$, $u_2^{(2)} = u_2^{(1)}$, $u_3^{(2)} = -u_3^{(1)}$ (vedi Fig. 8.6). Pertanto, nel punto P il versore di polarizzazione $\hat{p}^{(2)}$ dell'antenna 2 sarà $\hat{p}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{u}_1^{(2)} + j\hat{u}_2^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{u}_1^{(1)} + j\hat{u}_2^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{x} + j\hat{y})$. Quindi, ruotando una antenna per passare dalla trasmissione alla ricezione si inverte il suo verso di polarizzazione (si ricordi anche che la polarizzazione dell'antenna in ricezione è la medesima del campo irradiato quando l'antenna è in trasmissione).

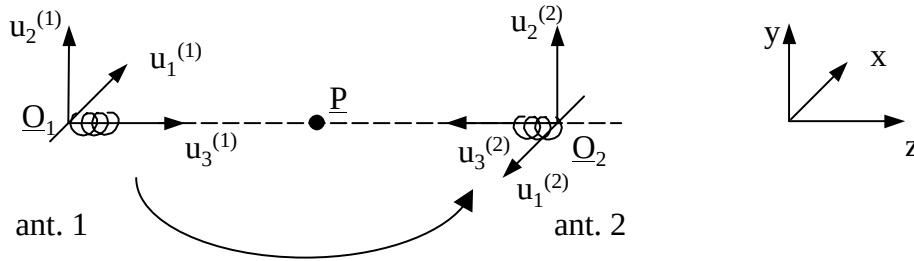


Figura 8.6. Sistema di due antenne affacciate: sistemi di riferimento locale e globale.

8.3 Effetti del rumore in un collegamento radio

8.3.1 Rumore nel sistema di comunicazione via radio

Ricordiamo innanzitutto che il rapporto segnale-rumore è di importanza fondamentale in un sistema di comunicazione. Prima di affrontare questo argomento è però necessario definire che cosa si intende nel nostro caso per segnale e per rumore.

Il rumore in un collegamento radio può essere generato o dalla circuiteria interna al sistema o dall'ambiente esterno. Il primo è dovuto alle perdite ohmiche sull'antenna e sul sistema ricevente ad essa collegato. Il rumore che ha origine nella circuiteria a valle dell'antenna ricevente non verrà considerato qui, se non per brevi cenni alla trasmissione del rumore all'interno del sistema ricevente. L'antenna stessa è fonte di rumore termico come elemento circuitale, per effetto delle perdite nei materiali che la costituiscono (si ricordi che il circuito equivalente comprende una resistenza ohmica) e tale rumore non è ovviamente dipendente dall'ambiente esterno. Nel seguito non considereremo questo effetto, sia perché di tipo “circuitale”, sia perché le perdite ohmiche sono trascurabili alle frequenze di cui ci occupiamo qui. Ci concentreremo qui invece sul rumore presente ai morsetti dell'antenna ricevente per effetto dell'ambiente esterno all'antenna stessa, cioè quello che si avrebbe nel caso ideale in cui l'antenna non avesse perdite ohmiche. Il rumore proveniente dall'ambiente esterno può essere generato da: apparecchi elettronici, scariche atmosferiche, radiazioni da corpo nero (originate da tutti i corpi presenti nello spazio circostante l'antenna), ecc...

Per quanto concerne il segnale, abbiamo qui quello vero e proprio (in “banda base”) per esempio un segnale telefonico ed il segnale che viene trasmesso attraverso lo spazio, cioè a radiofrequenza (dalla banda UHF in su). È bene pertanto soffermarsi sulle elaborazioni subite dal segnale nei vari stadi di un sistema di comunicazione via radio.

Nella trasmissione tramite onde radio il segnale vero e proprio modula le oscillazioni a radiofrequenze alla frequenza centrale f_0 , detta portante (*carrier*), tipicamente dalle UHF in su. Il segnale a radiofrequenza inviato all'antenna ricevente è a banda stretta (la banda B del segnale utile è $B \ll f_0$) e la forma specifica dello spettro dipende dal tipo di modulazione usata (AM, FM, PCM...): chiameremo Δf la banda del segnale a radiofrequenza modulato. Quest'ultimo viene poi trasmesso mediante l'antenna in spazio libero. In ricezione si ha una conversione dalla radiofrequenza a frequenze più basse¹ (ad esempio dalle radiofrequenze $\approx 10\text{GHz}$ alle UHF $\approx 400 \div 1000\text{MHz}$) e quindi una demodulazione, che alla fine restituisce il segnale in banda base. Lo schema tipico di un sistema di trasmissione è riportato in (Fig. 8.7).

Il rapporto tra la potenza di segnale (data dall'equazione della trasmissione (8.8)) e la potenza di rumore N ai morsetti di un'antenna non è quello che viene usualmente chiamato rapporto segnale-rumore ($\frac{S}{N}$) in un sistema di comunicazione, perché sia il segnale che il rumore sono a radiofrequenza; come detto sopra, il segnale utile si ottiene dopo la conversione di frequenza e la demodulazione. Per evitare confusione, si usa pertanto indicare con C la potenza

¹Secondo lo schema del “ricevitore supereterodina” cfr.: J.G.Proakis e M.Salehi, *Communication System Engineering*, Prentice-Hall, 1994, §5.4.1

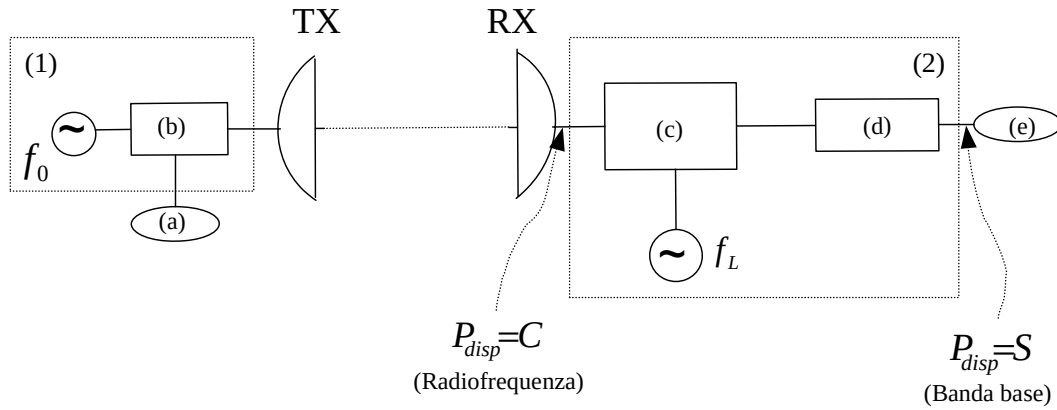


Figura 8.7. Schema di un sistema di trasmissione: (1) Sistema di trasmissione; (2) Sistema ricezione; (a) segnale da trasmettere; (b) modulatore; (c) down-converter; (d) demodulatore; (e) segnale ricevuto in banda base

di segnale a radiofrequenza ed il rapporto:

$$\frac{C}{N} = \frac{P_{disp}^{RX}}{N} \quad (8.16)$$

viene detto *carrier-to-noise ratio*. Tale rapporto è diverso dal rapporto $\frac{S}{N}$ all'utente finale, ed il legame $\frac{C}{N} - \frac{S}{N}$ dipende fortemente dal tipo di modulazione.

Nel seguito, noi ci occuperemo solo del rapporto $\frac{C}{N}$, in quanto caratteristico del collegamento via radio (e indipendente dal tipo di modulazione e di apparato trasmissione-ricezione).

8.3.2 Potenza di rumore in ingresso all'antenna

Se consideriamo solo il rumore proveniente dall'ambiente esterno all'antenna ricevente, ciascuna fonte di rumore emette radiazioni indipendentemente dalle altre, pertanto è possibile descrivere l'effetto di questi disturbi mediante sorgenti che irradiano in modo incoerente, cioè in maniera scorrelata le une dalle altre.

In particolare, considereremo che tutto lo spazio intorno all'antenna emetta radiazione di *corpo nero* (black-body); questa è un'assunzione usuale in letteratura, anche se molte sorgenti di rumore di origine terrestre hanno una statistica differente. Dobbiamo quindi valutare la potenza disponibile ai morsetti dell'antenna per ricezione di un campo elettromagnetico emesso da un oggetto *esteso* e in cui ogni punto di esso emette in modo scorrelato dagli altri punti. Si noti che sinora si sono sempre considerati sorgenti in campo lontano, dove cioè sono considerabili come puntiformi, e le definizioni dei parametri di ricezione di una antenna a tale situazione si riferiscono; inoltre abbiamo sempre considerato sorgenti coerenti. Vediamo allora come si estendono i risultati noti a tali casi.

Nel seguito, per semplicità di notazione, ometteremo il pedice *disp* nella potenza ricevuta.

Ricezione di campo emesso da sorgenti scorrelate

Iniziamo a considerare delle sorgenti puntiformi (solite) ma che emettono "segnali" scorrelati.

Dato che sinora abbiamo sempre trattato sorgenti coerenti, per capire come trattare l'effetto complessivo di molte sorgenti incoerenti consideriamo dapprima il caso più semplice di due sorgenti di rumore (vedi Fig.8.8); considereremo sempre il caso in cui il rapporto tra le dimensioni

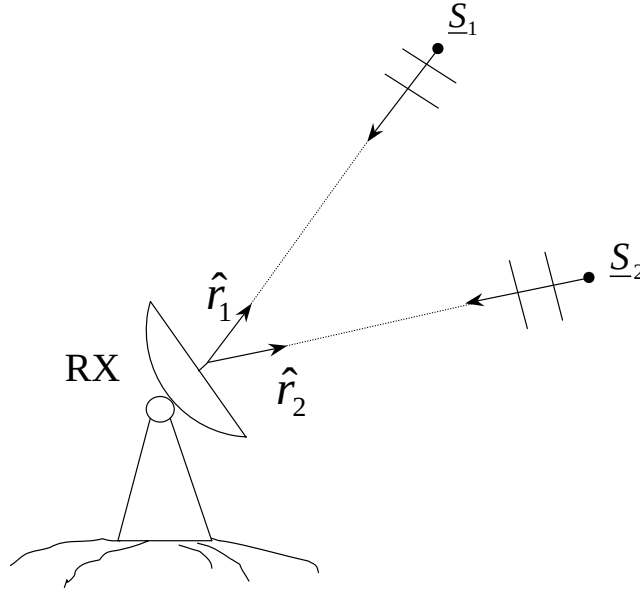


Figura 8.8. Sorgenti di rumore (caso semplificato): $\underline{S}_1$ e $\underline{S}_2$ sono le sorgenti di rumore; $\hat{r}_1$ e $\hat{r}_2$ individuano le direzioni di collegamento sorgente-antenna ricevente

delle sorgenti e la loro distanza dall'antenna ricevente sono tali da verificare la condizione di campo lontano (cioè sono viste geometricamente come puntiformi dall'antenna in ricezione) e i loro centri $\underline{S}_1$ e $\underline{S}_2$ sono nella regione di campo lontano dell'antenna ricevente. Ricordando che la tensione del generatore equivalente in ricezione è definita, per un'onda piana all'antenna ricevente e per sorgente singola, come (vedi eq.(4.50)):

$$V_{a1} = \underline{h}_{eff}(\hat{r}_1) \cdot \underline{E}_{inc}^{(1)}, \quad V_{a2} = \underline{h}_{eff}(\hat{r}_2) \cdot \underline{E}_{inc}^{(2)} \quad (8.17)$$

la tensione totale ai capi dell'antenna è

$$\begin{aligned} V_a &= V_{a1} + V_{a2} \\ &= \underline{h}_{eff}(\hat{r}_1) \cdot \underline{E}_{inc}^{(1)} + \underline{h}_{eff}(\hat{r}_2) \cdot \underline{E}_{inc}^{(2)} \end{aligned} \quad (8.18)$$

da cui:

$$P \propto |V_a|^2 = |V_{a1} + V_{a2}|^2 \quad (8.19)$$

Ora, in generale

$$|V_{a1} + V_{a2}|^2 \neq |V_{a1}|^2 + |V_{a2}|^2 \quad (8.20)$$

in quanto bisogna tener conto di ampiezze e fasi relative; tuttavia, se le sorgenti sono incoerenti ed intendendo valori medi (in senso statistico), si ha:

$$|V_a|^2 = |V_{a1}|^2 + |V_{a2}|^2 \quad (8.21)$$

nel ricavare il risultato sopra va anche tenuto conto del fatto che i segnali hanno media nulla, in quanto la continua non può essere irradiata né ricevuta. Ne segue che le potenze (in senso medio) si sommano,

$$P = P_1 + P_2 \quad (8.22)$$

Con ovvia estensione al caso di più sorgenti si ottiene:

$$P = \sum_i P_i \quad (8.23)$$

Se le sorgenti occupano una regione Σ angularmente estesa, dovremo suddividerla in zone le cui dimensioni siano puntiformi nel senso specificato sopra; ciò comporta la suddivisione della regione di sorgente in sottodomini di area ΔA , che siano visti dall'antenna in ricezione come puntiformi, cioè sotto un angolo solido $\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{R^2} \ll 1$ (vedi Fig. 8.9).

Chiamiamo ΔP la potenza *ricevuta* dall'emissione di una area elementare ΔA del corpo

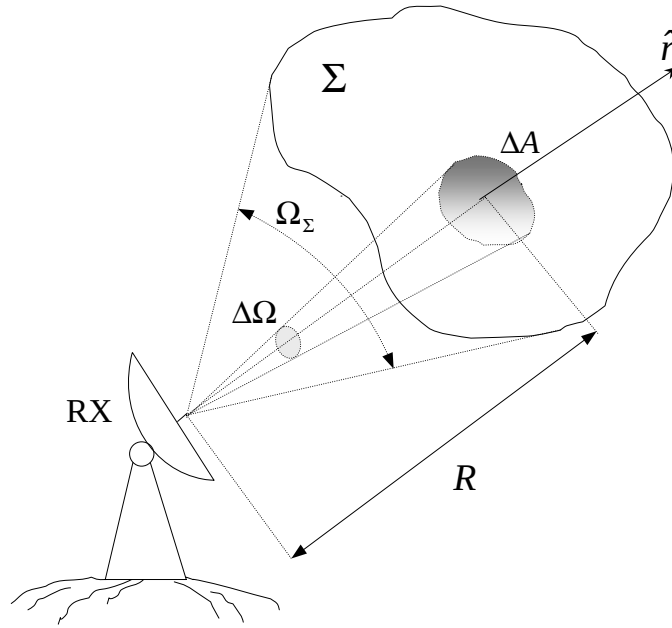


Figura 8.9. Densità di potenza irradiata dalla sorgente di rumore: Σ è la regione su cui si estende la sorgente; ΔA è l'elemento di superficie; Ω_Σ è l'angolo solido che individua Σ ; $\Delta\Omega$ l'elemento di angolo solido; R la distanza sorgente-antenna ricevente.

emettente, e scriviamo

$$\Delta P = \tilde{P} \Delta\Omega$$

. Passando al limite di $\Delta\Omega \rightarrow 0$ si ha:

$$P = \int_{\Omega_\Sigma} d\Omega \tilde{P}(\hat{r}) \quad (8.24)$$

$\tilde{P}(\hat{r})$ è la (densità di) potenza ricevuta per effetto dell'emissione di una sorgente elementare posizionata nella direzione $\hat{r}$, e che occupa una regione dA vista sotto un angolo solido $d\Omega$ dall'antenna ricevente.

Nel caso che ci interessa, tutto lo spazio circostante l'antenna è sorgente di rumore: anche lo spazio intergalattico emette (debole) radiazione di corpo nero (con $T \simeq 2.8\text{K}$). Pertanto, l'integrale su $d\Omega$ in (8.24) va esteso a tutte le direzioni:

$$P = \int_{(4\pi)} d\Omega \tilde{P}(\hat{r}) \quad (8.25)$$

dove la notazione (4π) indica l'integrazione su tutte le direzioni possibili ovvero, esplicitando in coordinate sferiche centrate sull'antenna,

$$P = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \tilde{P}(\theta, \phi) \quad (8.26)$$

Radiazione di corpo nero

Come detto sopra, nel seguito consideriamo il rumore termico come dovuto alla radiazione di corpo nero. Dalla teoria del corpo nero si ottiene la "densità spettrale" di potenza emessa, cioè la potenza emessa nell'unità di banda; indicheremo tale densità di potenza con $p(f)$ (in W/m^2). Ora, si ottiene che un elemento di corpo nero di area dA emette in modo isotropico con intensità proporzionale all'area; dai nostri risultati sappiamo che la $dP/d\Sigma$ decade come $1/R^2$, e quindi possiamo dire che

$$\left(\frac{dp}{d\Sigma}\right)_{irr} \propto dA \frac{1}{R^2} \quad (8.27)$$

si noti l'uso di p per indicare la densità spettrale di potenza. La costante di proporzionalità in (8.27) si chiama *brillanza* B , e dipende in generale dalla frequenza f e dalla temperatura del corpo nero T ; ovvero

$$\left(\frac{dp}{d\Sigma}\right)_{irr} = B(f; T) dA \frac{1}{R^2} = B(f; T) d\Omega \quad (8.28)$$

Adesso siamo in grado di valutare la (densità spettrale di) potenza $p(f)$ disponibile all'antenna ricevente per effetto della radiazione di corpo nero, utilizzando l'equazione della trasmissione (4.18); per far ciò dobbiamo considerare la ricezione da una sola sorgente puntiforme alla volta, come nell'integrando della (8.25). Il contributo di una areola dA di corpo nero sarà dunque

$$\tilde{p}(f, \hat{r}) = \frac{\lambda^2}{4\pi} g(\hat{r}) \left(\frac{dp}{d\Sigma}\right)_{inc} \chi = \frac{\lambda^2}{4\pi} g(\hat{r}) \chi B d\Omega \quad (8.29)$$

Poiché le sorgenti che emettono radiazioni di corpo nero sono distribuite su tutto lo spazio circostante l'antenna ricevente, la potenza di rumore totale disponibile in ricezione, dalla (8.29) e dalla (8.25) è

$$p = \int_{(4\pi)} d\Omega \frac{\lambda^2}{4\pi} g(\hat{r}) \chi B \quad (8.30)$$

La potenza totale si ha infine integrando sull'intervallo di frequenza considerato, ovvero sulla banda $[f_0 - \Delta f/2, f_0 + \Delta f/2]$ del sistema ricevente (antenna, filtri del ricevitore, etc.),

$$P = \int_{f_0 - \Delta f/2}^{f_0 + \Delta f/2} df \int_{(4\pi)} d\Omega \frac{\lambda^2}{4\pi} g(\hat{r}) \chi B(f; T) \quad (8.31)$$

Temperatura equivalente di rumore dell'antenna

La brillantezza del corpo nero (B) è descritta dalla *legge di Planck*:

$$B(f, T) = \frac{2}{\lambda^2} e_{BB} \quad (8.32)$$

dove

$$e_{BB} = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \quad (8.33)$$

e inoltre: T è la temperatura di corpo nero; $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ (Js) è la *costante di Planck*; $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ (JK⁻¹) è la *costante di Boltzmann*. In (Fig. 8.10) è riportato il diagramma della brillantezza ($B(f, T)$) in funzione della frequenza (f) e al variare della temperatura di corpo nero (T). Nel caso che ci interessa qui, cioè per frequenze non superiori a qualche decina di

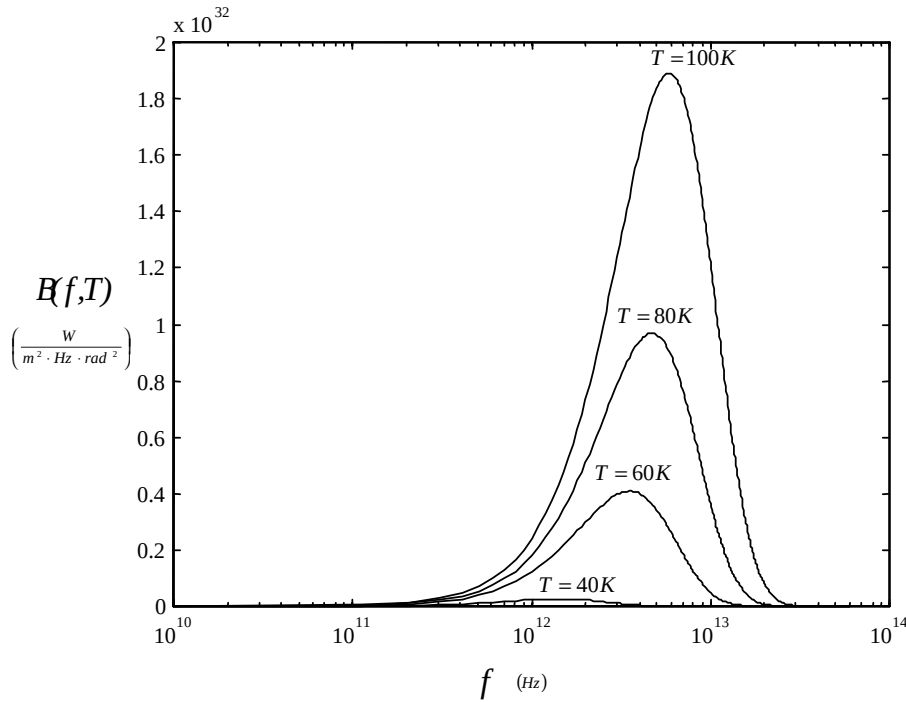


Figura 8.10. Diagramma della brillantezza ($B(f, T)$) in funzione della frequenza (f) e al variare della temperatura di corpo nero (T)

GHz e per temperature dell'ordine delle centinaia di K, si ha che $\frac{hf}{k_B T} \ll 1$ (approssimazione

di *Rayleigh-Jeans*); per esempio per $f = 10$ GHz e $T = 800$ K si calcola che:

$$\frac{hf}{k_B T} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \left(\frac{\text{J}}{\text{Hz}} \right) \cdot 10^{10} (\text{Hz})}{1.38 \cdot 10^{-23} \left(\frac{\text{J}}{\text{K}} \right) \cdot 8 \cdot 10^2 (\text{K})} \simeq 10^{-3} \ll 1 \quad (8.34)$$

Espandendo quindi l'esponenziale, si ottiene

$$e_{BB} \simeq k_B T \quad (8.35)$$

e

$$B(f, T) \simeq \frac{2}{\lambda^2} \cdot k_B T \quad (8.36)$$

Per quanto riguarda l'attenuazione per depolarizzazione χ , ricordiamo che l'antenna ricevente è un oggetto deterministico, con una ben precisa polarizzazione $\hat{p}_r$; invece, il campo emesso dalla sorgente di rumore avrà una polarizzazione casuale $\hat{p}_t$ ovvero il campo assume in modo equiprobabile una delle polarizzazioni possibili; di conseguenza $\chi = |\hat{p}_r \cdot \hat{p}_t|^2$ assume in maniera equiprobabile tutti i valori possibili nell'intervallo $[0, 1]$ con media $\frac{1}{2}$. Sostituendo allora nella (8.31) la (8.36), ed assumendo trascurabili le variazioni di guadagno nella banda (stretta) Δf si ha l'espressione finale

$$P \simeq \Delta f \frac{k_B}{4\pi} \int_{(4\pi)} d\Omega g(\hat{r}) T(\hat{r}) \quad (8.37)$$

Data la somiglianza con la potenza di rumore nei circuiti, definiamo come *temperatura equivalente di rumore* dell'antenna:

$$T_a = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega g(\hat{r}) T(\hat{r}) \quad (8.38)$$

con cui la potenza disponibile di rumore ricevuta dall'antenna, che d'ora in poi chiameremo N (come d'uso), è del tipo solito:

$$N \simeq k_B T_a \Delta f \quad (8.39)$$

8.3.3 Bilancio energetico di tratta (link-budget)

Dall'equazione della trasmissione (8.8) si ricava l'espressione della potenza di segnale (C) associata alla portante:

$$C = EIRP g_r A_{fs} \chi A_{agg} \quad (8.40)$$

dove A_{agg} è il termine relativo alle attenuazioni aggiuntive dovute a: diffrazione da ostacoli, riflessione da terreno, assorbimento atmosferico, ecc...

La potenza di rumore ricevuta dall'antenna è data dalla (8.39); di conseguenza il rapporto *carrier-to-noise* può essere espresso dall'*Equazione del link-budget*:

$$\frac{C}{N} = \frac{EIRP g_r A_{fs} \chi A_{agg}}{k_B T_a \Delta f} \quad (8.41)$$

Esaminiamo la (8.41) dal punto di vista dell'utente in ricezione. Supponiamo di essere gli utenti di un sistema di telecomunicazioni e di voler in qualche modo interagire col sistema stesso al fine di incrementare il rapporto $\frac{C}{N}$ (per ricevere un segnale meno disturbato). Notiamo che Δf ed

$EIRP$ sono parametri fissati dal servizio in trasmissione. Per quanto concerne le attenuazioni: quella di *free-space* dipende dalla distanza fra le due antenne (che è imposta dalla situazione), nonché dalla frequenza (caratteristica del servizio); quella *aggiuntiva* è invece legata a eventi non controllabili dall'utente. La depolarizzazione χ può essere controllata, e tipicamente sarà $\simeq 1$, a meno di errori e in modo pressoché indipendente dall'antenna in ricezione. Ne concludiamo che l'unico parametro che dipende direttamente dall'antenna ricevente è il rapporto $\frac{g_r}{T_a}$; tipicamente si punterà l'antenna ricevente in modo che $g_r = G_R$ e il rapporto:

$$\frac{G_R}{T_a} \quad (8.42)$$

definisce quindi il *fattore di merito* dell'antenna in ricezione. Notiamo che per aumentare G_R è necessario aumentare le dimensioni dell'antenna; si noti però che anche T_a dipende dal diagramma di irradiazione dell'antenna ricevente, come chiaro dalla (8.38). Per innalzare $\frac{G_R}{T_a}$ bisognerà quindi fare attenzione a che i lobi secondari dell'antenna stiano molto bassi in quelle direzioni da cui proviene massimamente il rumore, tipicamente dalle direzioni verso il suolo terrestre.

In analogia a quanto fatto per l'equazione della trasmissione, ricaviamo anche qui la forma in dB dell'equazione del link-budget, tenendo presente la (ovvia) identità $1 \text{ W} = 1 \text{ W}/(\text{Hz} \cdot \text{K}) \times 1 \text{ K} \times 1 \text{ Hz}$. Si ha dunque:

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{\text{dB}} = EIRP_{\text{dBW}} - \alpha_{link} - (k_B)_{\text{dBW} \cdot \text{Hz}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} - (\Delta f)_{\text{dB} \cdot \text{Hz}^{-1}} + \left(\frac{G_r}{T_a}\right)_{\text{dB} \cdot \text{K}^{-1}} \quad (8.43)$$

in cui risultano:

$$(T_a)_{\text{dB K}} = 10 \log \left(\frac{T_a}{1 \text{ K}} \right)$$

$$(\Delta f)_{\text{dB Hz}} = 10 \log \left(\frac{\Delta f}{1 \text{ Hz}} \right)$$

$$\left(\frac{G}{T_a}\right)_{\text{dB K}^{-1}} = G_{\text{dB}} - 10 \log \left(\frac{T_a}{1 \text{ K}} \right)$$

$$(k_B)_{\text{dB J K}^{-1}} = 10 \log \frac{k_B}{1 \text{ W}/(\text{Hz K})} = -228.6 \text{ dB}(\text{W}(\text{Hz}^{-1} \text{K}^{-1}))$$

$$\alpha_{link} = \alpha_{pol} + \alpha_{fs} + \alpha_{agg}$$

Collegamento radio in presenza di terreno piano

Benché la superficie terrestre non sia né piana né liscia, il calcolo dell'effetto di un terreno piano e liscio sul collegamento radio è in grado di mostrare alcuni effetti fondamentali del problema, e di dare delle linee guida per il dimensionamento di massima di un sistema di radiocollegamento.

Per quel che riguarda la curvatura terrestre, per le frequenze di attuale interesse commerciale l'attenuazione per propagazione oltre la linea dell'orizzonte è tale da impedirne l'applicazione pratica. L'approssimazione fondamentale nel considerare un terreno piano è invece quella che sia liscio.

Inizieremo la nostra analisi con approssimazione di terreno perfettamente conduttore, piano ed indefinito. Per quanto in pratica tale approssimazione sia valida a stretto rigore solo nel caso di propagazione sopra il mare o regioni paludose, vedremo che i suoi risultati sono estensibili senza grandi variazioni al caso di un terreno dielettrico.

9.1 Riflessione da terreno conduttore

Per un terreno perfettamente conduttore, piano ed indefinito è possibile applicare il teorema dell'immagine (Fig. 9.1), e la situazione è equivalente ad avere due sorgenti (vera e immagine) in spazio libero.

Dato che le immagini delle sorgenti hanno segno diverso a seconda dell'orientamento rispetto al piano e la natura delle stesse (elettriche o magnetiche), separiamo le sorgenti in una componente verticale (V), ovvero ortogonale, e orizzontale (H), e quindi parallela, rispetto al piano; ci poniamo inoltre nel caso di collegamento quasi radente, il caso cioè in cui sia l'osservatore che le sorgenti sono prossime al conduttore.

Noi vogliamo inoltre separare i termini verticale e orizzontale rispetto al campo invece che rispetto alle sorgenti equivalenti, che tipicamente non sono "accessibili". Per il campo di ciascuna sorgente (vera o immagine) si ha che

$$\underline{P}_e = \underline{I}_{t\hat{r}} \cdot \tilde{\underline{J}}_e(k_0\hat{r}) + Y_0[(\hat{r} \times \underline{I}) \cdot \tilde{\underline{J}}_m(k_0\hat{r})] = (\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e + Y_0(\hat{\phi}\hat{\theta} - \hat{\theta}\hat{\phi}) \cdot \tilde{\underline{J}}_m \quad (9.1)$$

Vediamo ora quale è l'effetto delle componenti verticali (V) ed orizzontali (H) delle due correnti, tenendo presente che stiamo esaminando il caso di collegamento radente, ovvero (Fig. 9.2)

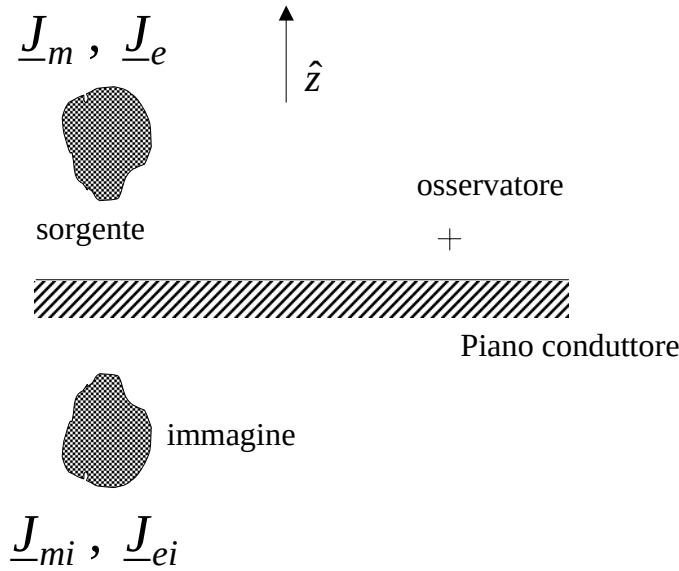


Figura 9.1. Sorgenti e osservatori su un piano conduttore

$\frac{h_2 - h_1}{d} \ll 1$ per cui risulta $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ e di conseguenza $\hat{\theta} \approx -\hat{z}$. Ne segue che la (9.1) diventa

$$\underline{P}_e \approx (\hat{z}\hat{z} + \hat{\phi}\hat{\phi}) \cdot \tilde{\underline{J}}_e - Y_0(\hat{\phi}\hat{z} - \hat{z}\hat{\phi}) \cdot \tilde{\underline{J}}_m \quad (9.2)$$

Si noti che $\hat{\phi}$ è sempre orizzontale ($\hat{\phi} \cdot \hat{z} = 0$), e quindi $\hat{z}$ e $\hat{\phi}$ in (9.2) individuano, rispettivamente, le direzioni verticale e orizzontale. Separando anche le componenti verticali ed orizzontali delle $\tilde{\underline{J}}_e, \tilde{\underline{J}}_m$, cioè

$$\tilde{\underline{J}} = \tilde{J}^H \hat{\phi} + \tilde{J}^V \hat{z} \quad (9.3)$$

dalla (9.2) si la corrispondenza alle parti verticali e orizzontale della $\underline{P}_e$:

$$\underline{P}_e^H \approx \hat{\phi}(\tilde{J}_e^H - Y_0 \tilde{J}_m^V), \quad \underline{P}_e^V \approx \hat{z}(\tilde{J}_e^V + Y_0 \tilde{J}_m^H) \quad (9.4)$$

Utilizzando il teorema delle immagini (v. Fig. (9.3)) si riconosce immediatamente che le sorgenti immagine danno un contributo equiverso per la componente verticale della $\underline{P}_e$ e controverso per quella orizzontale. Pertanto l'altezza efficace $\underline{h}_{eff}$ è separabile in due contributi: $\underline{h}_{eff}^H$, che ha immagine $-\underline{h}_{eff}^H$, e $\underline{h}_{eff}^V$, che ha immagine pari a $\underline{h}_{eff}^V$. Possiamo unificare la notazione scrivendo $\underline{h}_{eff,imm} = \tau \underline{h}_{eff}$, dove $\tau = +1$ per la polarizzazione V e $\tau = -1$ per la polarizzazione H.

9.1.1 Campo irradiato in presenza di terreno

Si consideri la situazione di Fig. 9.4: l'obiettivo è valutare il campo totale, dovuto alla sorgente ed alla sua immagine, incidente nel punto $\underline{P}$. Ci si pone sul piano ove giacciono il trasmettitore ed il ricevitore (l'immagine è ovviamente complanare), e dalla geometria del sistema :

$$r_r = \sqrt{d^2 + (h_2 + h_1)^2}$$

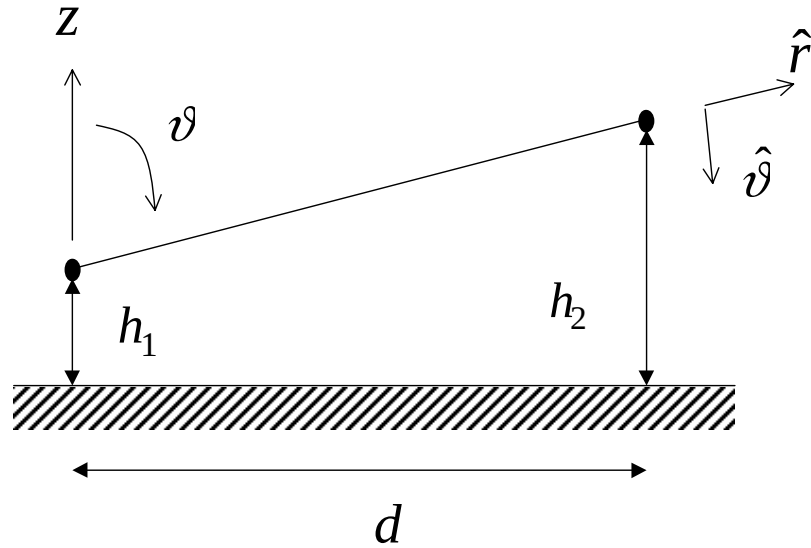


Figura 9.2. Geometria di riferimento

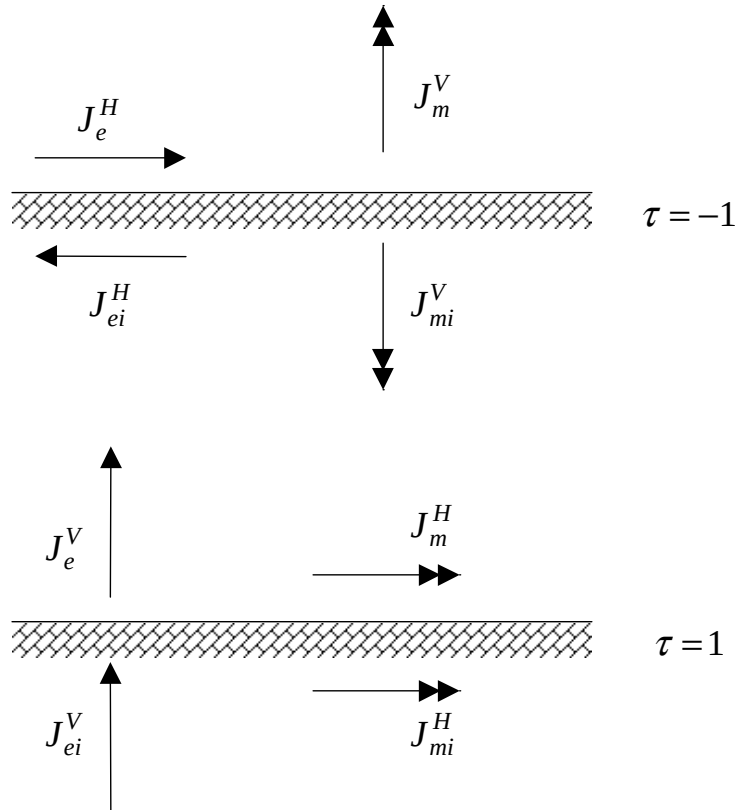


Figura 9.3. Teorema dell'immagine per le componenti orizzontale H, parallela al terreno, e verticale V, ortogonale al terreno, delle sorgenti.

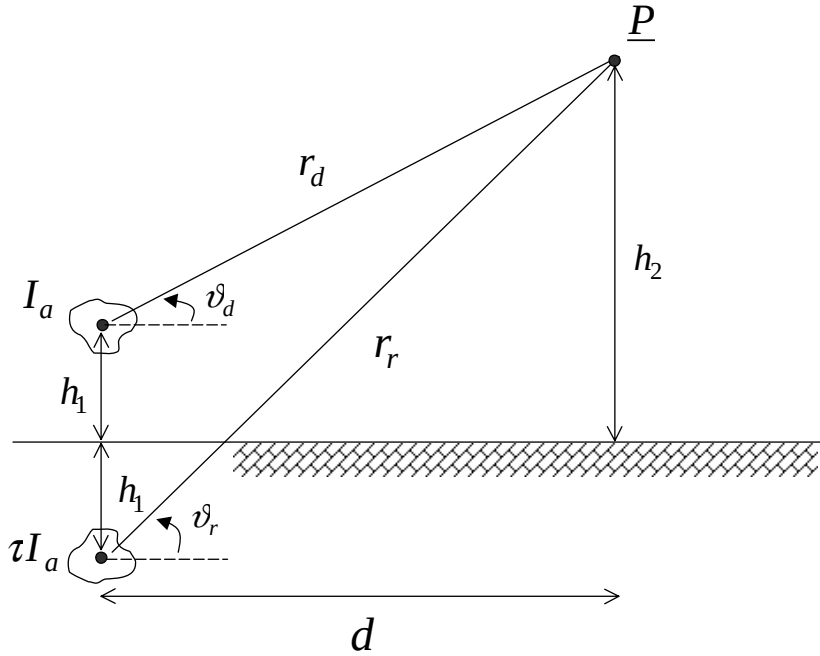


Figura 9.4. Riflessione da terreno piano perfettamente conduttore

$$r_d = \sqrt{d^2 + (h_2 - h_1)^2}$$

mentre il segno dell'immagine risulta, dalla discussione precedente $\tau = -1$ per polarizzazione orizzontale e $\tau = 1$ per polarizzazione verticale. Considerando una polarizzazione alla volta, ma omettendo le indicazioni V ed H per brevità il campo totale al ricevitore risulta:

$$\underline{E}(P) = \underline{E}_d(P) + \underline{E}_r(P) = \frac{-jZ_0}{2r_d\lambda} e^{-jk r_d} I_a \underline{h}_e(\hat{r}_d) + \frac{-jZ_0}{2r_r\lambda} e^{-jk r_r} \tau I_a \underline{h}_e(\hat{r}_r) \quad (9.5)$$

siccome $h_{1,2} \ll d$ (decine di metri vs. km), gli angoli $\theta_{d,r}$ che identificano $\hat{r}_d, \hat{r}_r$ in Fig. 9.4 sono ricavabili con le seguenti approssimazioni:

$$\theta_d = \tan^{-1}\left(\frac{h_2 - h_1}{d}\right) \approx \frac{h_2 - h_1}{d}; \quad \theta_r = \tan^{-1}\left(\frac{h_2 + h_1}{d}\right) \approx \frac{h_2 + h_1}{d}$$

risulta pertanto che la differenza $\Delta\theta$ tra le due direzioni $\hat{r}_r$ e $\hat{r}_d$ è $\Delta\theta = \theta_r - \theta_d \approx \frac{h_1}{d}$. Se l'antenna in trasmissione non è troppo direttiva, ovvero se la sua larghezza di fascio è $HPBW \gg \frac{h_1}{d}$ allora $\underline{h}_e(\hat{r}_r) \approx \underline{h}_e(\hat{r}_d)$; inoltre, approssimando r_r e r_d al primo ordine in $h_{1,2} \ll d$, si ottiene:

$$r_r \approx d \sqrt{1 + \frac{(h_2 + h_1)^2}{d^2}} \approx d \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(h_2 + h_1)^2}{d^2}\right)$$

$$r_d \approx d \sqrt{1 + \frac{(h_2 - h_1)^2}{d^2}} \approx d \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(h_2 - h_1)^2}{d^2}\right)$$

Al solito, per i termini di ampiezza vale $\frac{1}{r_{r,d}} \approx \frac{1}{d}$, mentre la fase richiede un'approssimazione al 1° ordine; introducendo queste approssimazioni nella 9.5, il campo $\underline{E}(\underline{P})$ è allora esprimibile come segue:

$$\underline{E} \approx \frac{-jZ_0}{2d\lambda} e^{-jk d} I_a \underline{h}_e(\theta_d) [e^{-jk \frac{(h_2-h_1)^2}{2d}} + \tau e^{-jk \frac{(h_2+h_1)^2}{2d}}] \quad (9.6)$$

Sviluppando i quadrati e raccogliendo i fattori comuni si ottiene

$$\underline{E} \approx \frac{-jZ_0}{2d\lambda} e^{-jk(d + \frac{h_2^2 - h_1^2}{2d})} I_a \underline{h}_e(\theta_d) [e^{jk \frac{h_1 h_2}{d}} + \tau e^{-jk \frac{h_1 h_2}{d}}] \quad (9.7)$$

Si pu notare come il termine di fase sia il termine più rilevante ai fini dell'interferenza. Indicando con:

$$A_\tau(h_1, h_2) = e^{jk \frac{h_1 h_2}{d}} + \tau e^{-jk \frac{h_1 h_2}{d}}$$

$$\delta = k \frac{h_1 h_2}{d} = 2\pi \frac{h_1 h_2}{\lambda d}$$

risulta per le due polarizzazioni:

$$\text{polarizzazione orizzontale : } \tau = -1 \rightarrow A^- = 2j \sin \delta = A_H$$

$$\text{polarizzazione verticale : } \tau = 1 \rightarrow A^+ = 2 \cos \delta = A_V$$

si pone $H = \sqrt{h_1 h_2}$ (altezza media) e $\delta = 2\pi \frac{H}{\lambda} \frac{H}{d}$; vediamo ora di capire come varia $\underline{E}(\underline{P})$ se la polarizzazione dell'antenna in trasmissione è orizzontale oppure verticale.

Se $\delta \ll 1$, ovvero se $\frac{H}{d} \ll \frac{\lambda}{H}$ allora per la polarizzazione orizzontale risulta $A_H = 4\pi \frac{H}{\lambda} \frac{H}{d}$ ed il campo aumenta al crescere delle altezze. Per la polarizzazione verticale risulta $A_V \approx 2$ pertanto questa polarizzazione non è attenuata dall'interferenza con la componente riflessa (anzi l'interferenza costruttiva, $A_V > 1$) (ma ha altri problemi, infatti interagisce con strutture verticali quali pali, edifici etc).

La condizione $\delta \ll 1$ può non essere soddisfatta se $\frac{H}{\lambda} \gg 1$, per ponti radio i valori caratteristici sono di decine di metri per H e di decine di Km per la distanza d , pertanto questa approssimazione rimane valida per $\lambda > 1 \text{ m}$. Per valori inferiori l'approssimazione di terreno perfettamente conduttore non è più valida ed assumono un'importanza determinante la rugosità del terreno e le perdite ohmiche del terreno. Si noti inoltre che, nelle condizioni di $\delta \ll 1$, la polarizzazione circolare risulta fortemente corrotta, infatti in queste condizioni le due attenuazioni $A_{H,V}$ sono molto differenti ($A_H \approx 2\delta$ e $A_V \approx 2$) e pertanto la polarizzazione ricevuta in $\underline{P}$ risulterà fortemente ellittica. Inoltre nel caso limite sul piano è lineare perchè $\underline{E}_H = E_{tg} = 0$

9.1.2 Ricezione

Si calcola ora la tensione ai morsetti dell'antenna ricevente, in presenza di piano conduttore (Fig. 9.5). Si ha, come noto:

$$V_a = \underline{h}_d(\hat{r}_d) \cdot \underline{E}_d + \underline{h}_r(\hat{r}_r) \cdot \underline{E}_r \quad (9.8)$$

Se anche la larghezza del fascio dell'antenna ricevente soddisfa le stesse condizioni di quella trasmittente (fascio abbastanza largo), si ha $\underline{h}_d(\hat{r}_d) \approx \underline{h}_r(\hat{r}_r)$ e quindi

$$V_a \approx \underline{h}_d(\hat{r}_d) \cdot (\underline{E}_d + \underline{E}_r) = \underline{h}_d(\hat{r}_d) \cdot \underline{E}^{tot} \quad (9.9)$$

Si noti nel caso di antenne ad alto guadagno (in ricezione, trasmissione, o entrambe) questa approssimazione non è più valida; in questo caso però l'effetto del terreno è irrilevante, perché il lobo principale dell'antenna trasmittente non viene praticamente riflesso dal terreno, e/o l'antenna ricevente, se anch'essa ad alto guadagno, riceve con un livello molto basso il contributo riflesso dal terreno.

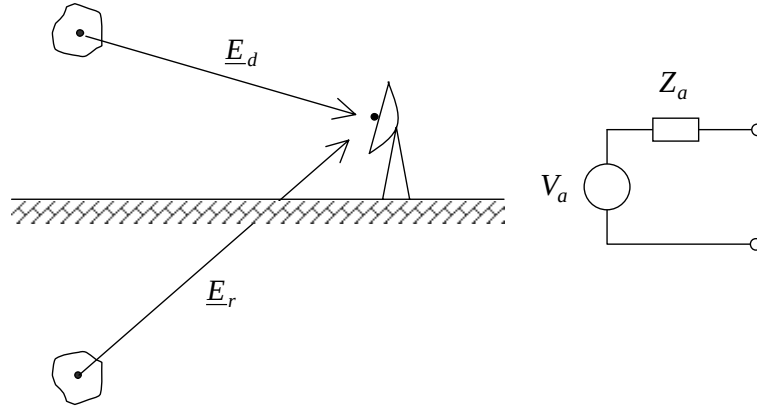


Figura 9.5. Antenna in ricezione e circuito equivalente

Notiamo anche che l'espressione del modulo del campo elettrico totale è :

$$|\underline{E}_{tot}|^2 = |\underline{E}^H + \underline{E}^V|^2 = |\underline{E}^H|^2 + |\underline{E}^V|^2 = |\underline{E}_d^H|^2 (2 \sin \xi)^2 + |\underline{E}_d^V|^2 (2 \cos \xi)^2 \quad (9.10)$$

se la polarizzazione è circolare allora $|\underline{E}_d^H| = |\underline{E}_d^V|$, per cui

$$|\underline{E}_{tot}|^2 = 4|\underline{E}_d^V|^2 (\sin^2 \xi + \cos^2 \xi) = 4|\underline{E}_d^V|^2 \quad (9.11)$$

ovvero non si ha attenuazione; ciò capita perché ciò che viene perso dalla componente H viene recuperato dalla componente V.

9.2 Terreno non conduttore

Finora abbiamo studiato il caso di terreno perfettamente conduttore ove la trattazione del campo ricevuto era semplice. L'estensione più immediata è quella a terreno dielettrico. Benché la trattazione completa sia assai complicata, se il terreno è nella zona di campo lontano per entrambe le antenne, il campo che incide su di esso può essere approssimato localmente come onda piana. Sotto questa ipotesi, e mantenendo quella di incidenza radente già vista si può estendere la (9.5) al caso di terreno dielettrico, semplicemente sostituendo a τ il coefficiente di riflessione pertinente alla polarizzazione considerata per direzione di riflessione speculare; indicando con $\underline{R}$ il punto di riflessione speculare, la direzione considerata è la direzione $\underline{R} - \underline{S}$ in Fig. 9.6.

Tali coefficienti di riflessione vengono derivati dal noto problema di riflessione su interfaccia piana¹, che richiede la scomposizione della polarizzazione nelle componenti TE e TM, ovvero l'identificazione della corrispondenza tra questa designazione della polarizzazione, e quella naturale qui, cioè V o H.

Disponendo gli assi in modo da avere incidenza nel piano (x, z) , è subito chiaro che nel caso di polarizzazione orizzontale si ha $\underline{E}_H = \hat{y}E_H$, e quindi si deve considerare il modo TE, per cui il campo elettrico è solo quello trasverso a $\hat{z}$. In tale caso il campo elettrico è completamente proporzionale alla tensione modale, e si verifica facilmente che

$$\underline{E}_H^{rfl}(\underline{R}) = \Gamma^{TE}(\theta_i) \underline{E}_H^{inc}(\underline{R})$$

dove $\Gamma^{TE}(\theta_i)$ è il coefficiente di riflessione delle linee modali equivalenti per il modo individuato dalla direzione di incidenza θ_i ; si ha quindi $\tau_H \rightarrow \Gamma^{TE}(\theta_i)$.

Per la polarizzazione orizzontale, si ha $\underline{E}_V \approx \hat{z}E_z$, benché il campo debba avere anche una (piccola) componente trasversale a $\hat{z}$ per poter essere ortogonale alla direzione di incidenza, che è prossima, ma non esattamente uguale, a $\pi/2$. È facile in questo caso vedere che si tratta di un modo TM ($E_z \neq 0$). Dato che la componente dominante del campo è E_z , bisogna riferirsi ad essa nel descrivere la riflessione nel punto $\underline{R}$; sappiamo dalla teoria modale che E_z è proporzionale alla corrente modale, e quindi si verifica che in questo caso

$$\underline{E}_V^{rfl}(\underline{R}) \approx \hat{z}E_z^{rfl}(\underline{R}) = -\Gamma^{TM}(\theta_i)E_z^{inc}(\underline{R})\hat{z} \approx -\Gamma^{TM}(\theta_i)\underline{E}_V^{inc}(\underline{R})$$

dove si è ricordato che il coefficiente di riflessione di corrente ha segno opposto a quello di tensione. Nel caso di polarizzazione verticale abbiamo allora $\tau_V \rightarrow -\Gamma^{TM}(\theta_i)$.

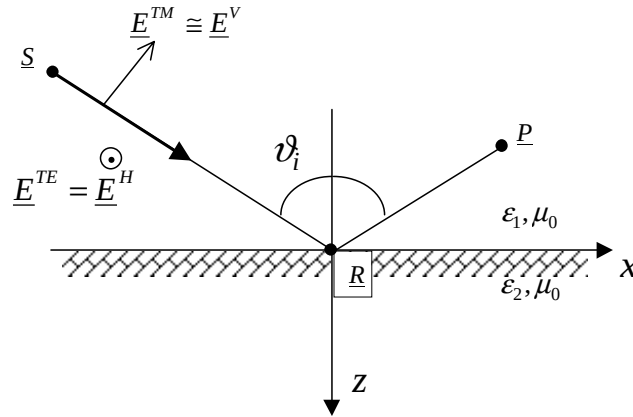


Figura 9.6. Incidenza radente su terreno non conduttore

Nel caso di conduttore ideale si riottiene il risultato della teoria delle immagini (il conduttore equivale ad un corto circuito, ed entrambi Γ^{TE} e Γ^{TM} valgono -1). Nel caso semplice di mezzo omogeneo per $z > 0$ i coefficienti di riflessione all'interfaccia sono in genere chiamati "di Fresnel"; per un dielettrico, si verifica che nel limite $\theta_i \rightarrow \pi/2$ si ha $\Gamma^{TE} \rightarrow -1$ e $\Gamma^{TM} \rightarrow 1$, in modo sostanzialmente indipendente dalla costante dielettrica del mezzo; si ha cioè una sostanziale riflessione completa all'interfaccia dielettrica che rappresenta il terreno non conduttore.

¹Vedere P.Savi, R.Zich., *Appunti di Campi Elettromagnetici*, Politecnico di Torino, 1998-1999, cap 4.

Il caso di conduttore non ideale è un poco più complicato perché la presenza di perdite assorbe parte dell'energia dell'onda incidente a Γ^{TM} dipende fortemente dalla resistenza superficiale del conduttore e dall'angolo di incidenza.

10

Introduzione al radar

10.1 Il radar

10.1.1 Caratteristiche generali dei sistemi radar

L'acronimo RADAR significa per esteso RAdio Detection And Ranging (“Intercettazione radio e localizzazione”). Il radar è un sistema che sfrutta la radiazione elettromagnetica per rivelare la presenza di oggetti, detti *bersaglio* (*target*), ed individuarne la distanza che li separa dalla posizione della stazione radar stessa o, indirettamente, da altri riferimenti spaziali d'interesse. In termini generali il funzionamento di un radar può essere schematizzato nel modo seguente:

- trasmissione di una particolare forma d'onda, in relazione al tipo di informazione sul bersaglio che si desidera ricavare (in questo paragrafo si fa riferimento, per semplicità di trattazione, ai soli radar che trasmettono treni di impulsi che modulano una portante sinusoidale. In seguito verranno presentate anche altre tipologie di radar);
- “ascolto dell'eco”, cioè del segnale eventualmente riflesso da un qualche ostacolo;
- estrazione del segnale utile (cioè del segnale che contiene informazioni sull'oggetto che si vuole osservare) dal segnale ricevuto (*signal processing*).

Si è detto che, essendo presente un oggetto sulla traiettoria percorsa dal segnale radar inviato, questo riflette parte di tale segnale. Ebbene la letteratura anglosassone distingue a questo proposito tra un campo riflesso dall'oggetto nella medesima direzione di provenienza del segnale radar (*backscatter*) ed un campo riflesso nelle altre direzioni (*bistatic scatter* o *electromagnetic scatter*), cosicché un sistema radar in cui antenna ricevente e antenna trasmittente coincidono viene detto radar monostatico o backscatter (dal momento che il segnale utile è quello che viene riflesso nella direzione del radar), mentre radar bistatico è il termine che si assegna ad un radar in cui tali antenne risultano distinte. Le informazioni sul bersaglio che i moderni radar sono in grado di ricavare dal segnale ricevuto sono molteplici. Una di queste, la distanza (*range*), viene determinata, per esempio nel caso di radar monostatico, misurando il tempo T_R impiegato dal segnale per raggiungere l'oggetto e tornare indietro. Ora, dal momento che le onde elettromagnetiche si propagano alla velocità c , la distanza R che separa l'oggetto dalla

posizione del radar si ricava dal prodotto tra tale velocità e il tempo T_R diviso due (dato che in tale intervallo di tempo il segnale percorre due volte la distanza radar-oggetto):

$$R = c \cdot \frac{T_R}{2} \quad (10.1)$$

Per quanto attiene alle unità di misura, generalmente la distanza viene espressa in km o in miglia marine (*nautical miles*). Si ha allora:

$$R[\text{km}] = 0.15T_R[\mu\text{s}] \quad (10.2)$$

$$R[\text{nmi}] = 0.081T_R[\mu\text{s}] \quad (10.3)$$

In tal modo è immediato notare che ad ogni microsecondo di tempo corrisponde una distanza di 0.081 nmi o di 150 m. Come si è detto un sistema radar è caratterizzato da una fase di invio del segnale e da una di ascolto. Ebbene, si pone il problema di come ripartire adeguatamente i periodi di tempo riservati all'una o all'altra attività. È chiaro che il tempo di ripetizione dell'impulso sarà fissato sulla base della distanza massima alla quale ci si aspetta di rilevare l'oggetto. Un tempo di ripetizione troppo elevato rischia di provocare ambiguità nei rilevamenti in quanto può succedere di ricevere un eco corrispondente ad impulsi precedenti senza essere in grado di individuare esattamente quale. Tali echi vengono detti echi *second time-around*. Per quanto detto è necessario individuare una distanza detta *massima distanza di non ambiguità*, al di là della quale gli echi si presentano come second time-around:

$$R_{mna} = \frac{c}{2f_p} \quad (10.4)$$

dove f_p è la frequenza di trasmissione degli impulsi.

10.1.2 Elementi costitutivi di un sistema radar

Un sistema radar è costituito da quattro elementi fondamentali, ognuno dei quali è deputato allo svolgimento di una ben determinata funzione (vedi Fig.10.1):

- *trasmettitore*: genera una forma d'onda dotata di un livello di potenza ritenuto adeguato al tipo di intercettazione da effettuare, livello di potenza che può essere al solito determinato con l'*equazione del radar* (10.33);
- *antenna*: costituisce l'elemento di interfaccia tra la linea di trasmissione del radar e il mezzo in cui si propaga la radiazione e viceversa ed ha il compito, grazie alle proprietà di direttività e guadagno, di privilegiare alcune direzioni di irradiazione e di ricezione dell'energia elettromagnetica;
- *ricevitore*: capta il segnale reirradiato dall'eventuale ostacolo, lo amplifica per portarlo ad un livello di potenza che lo renda "maneggiabile" e lo riporta dalle frequenze radio in banda base. Il segnale risulta così pronto per essere processato;
- *indicatore*: converte le informazioni ricavate dal segnale ricevuto in una forma immediatamente comprensibile all'utente, per esempio rappresentandole su un display (DSP).

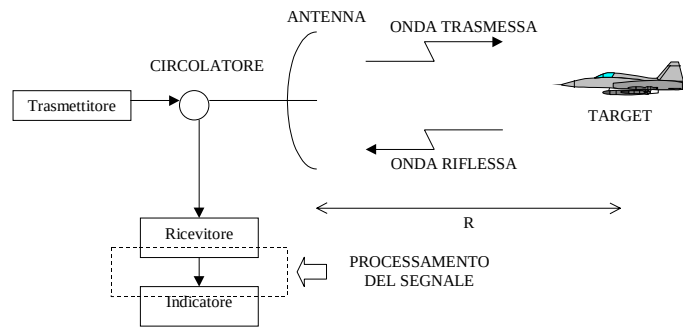


Figura 10.1. Elementi costitutivi del radar.

10.1.3 Cenni storici sulla nascita, lo sviluppo e l'evoluzione del radar

Benchè la tecnologia radar abbia trovato una vasta applicazione e un rapido sviluppo solo negli anni del Secondo Conflitto Mondiale, i principi che ne costituiscono i presupposti teorici furono già noti ai primi studiosi che si occuparono di fenomeni elettromagnetici. La formulazione completa delle equazioni di Maxwell, si sa, risale al 1873; già nel 1886 Hertz riuscì a dimostrare che le onde radio venivano riflesse da oggetti sia di natura metallica sia dielettrica. Egli si servì, peraltro, nei suoi esperimenti di onde corte, un'idea questa che avrebbe trovato riscontro nell'ingegneria dei sistemi radar solo negli Anni '30. Nel 1903 un ingegnere tedesco, Hülsmeyer, fu in grado di captare le onde radio riflesse dalle navi. Nel 1922 Marconi, in un celebre discorso all'Institute of Radio Engineers, spiegò l'importanza dell'utilizzo di onde corte per il rilevamento di oggetti. Negli anni che vanno dal 1922 al 1930 altri studiosi riuscirono ad intercettare con apparecchiature radar CW (per maggiori chiarimenti si veda il paragrafo successivo relativo alle tipologie di radar) dapprima navi poi aeromobili. Tra il 1934 e il 1936 comparve il radar ad impulsi. Negli anni che precedettero la Seconda Guerra Mondiale e durante la guerra stessa la tecnologia dei sistemi radar conobbe un periodo di ricerca intensa, tale da non avere eguali neppure in tempi più recenti. I risultati e la documentazione acquisita in questo periodo furono diffusi solo al termine delle ostilità. Dopo la Seconda Guerra Mondiale il radar trovò sempre più spazio in applicazioni civili e la tecnologia fu gradualmente adeguata alle nuove necessità fino a giungere alle numerose moderne applicazioni, alcune delle quali sono di seguito riportate:

1. Controllo del traffico aereo
2. Navigazione aerea (individuazione di perturbazioni, localizzazione di altri velivoli, sistema di conduzione automatica della navigazione, individuazione dell'altezza di crociera, etc.)
3. Sicurezza navale (radioaiuti alla navigazione, applicazioni simili a quelle del punto precedente)
4. Volo spaziale (partenza ed attracco sui pianeti, misurazioni di vario tipo)
5. Telerilevamento e diagnostica dell'ambiente (rilevamento e monitoraggio delle condizioni marine, risorse idriche, studio e controllo dell'agricoltura, delle condizioni delle foreste, delle formazioni geologiche, dell'inquinamento ambientale, etc.)
6. Sicurezza civile (antifurti, controllo della velocità delle automobili, etc.)

7. Applicazioni militari (aerei radar di nuova concezione, missili autoguidati, etc.)

10.2 Tipologie fondamentali di radar

Ci si è riferiti in precedenza, accennando ad una caratterizzazione generale dei sistemi radar, solo a quelli di tipo impulsato. In realtà i radar si distinguono in due principali categorie in relazione al tipo di forma d'onda che viene utilizzata per l'intercettazione: i radar ad impulsi appunto e i radar ad onda continua (*continuous wave*, CW). Come lascia intendere il nome i primi trasmettono treni di impulsi che modulano una portante sinusoidale, mentre i secondi si servono di segnali tempo continui. I radar CW più semplici trasmettono segnali non modulati e sono tuttavia in grado di individuare oggetti in movimento rispetto alla locazione del radar, basandosi sull'effetto Doppler, anche se non la loro distanza. È possibile determinare la distanza se ci si serve delle tecniche di modulazione di frequenza (FM) o di fase (PM). Di contro i radar ad impulsi sono in grado di intercettare e localizzare gli obiettivi ma non sono capaci di misurarne lo spostamento né la velocità (a questo scopo sarebbe necessario introdurre una strumentazione per il processamento del segnale piuttosto complessa). Va detto che i radar CW sono caratterizzati generalmente da una circuiteria più semplice di quella dei radar impulsati; inoltre i radar CW si servono di segnali il cui livello di potenza trasmessa è inferiore a quello che caratterizza i radar impulsati aventi la stessa potenza media. Infine i radar CW individuano anche oggetti a breve distanza dalla stazione radar ma sono caratterizzati da un meno efficace isolamento tra trasmettitore e ricevitore, parametro circuitale, questo, di notevole importanza nelle procedure di processamento. Si distingue infine tra radar monostatico (*backscatter*), per il quale l'antenna in trasmissione e quella in ricezione coincidono, e radar bistatico (*bistatic scatter*) in cui dette antenne sono distinte. La Fig.10.2 e la Fig.10.5 rappresentano rispettivamente i diagrammi

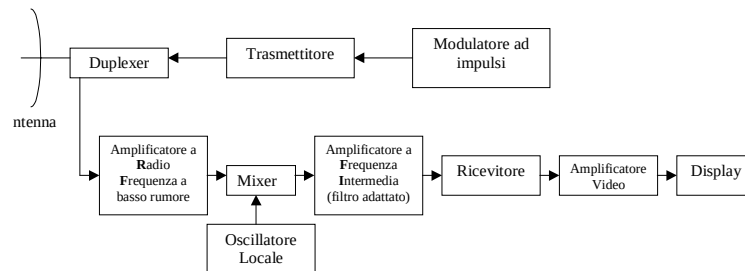


Figura 10.2. Diagramma a blocchi di un radar ad impulsi.

a blocchi delle due tipologie fondamentali di sistemi radar; una trattazione più dettagliata delle problematiche relative all'effettivo trattamento del segnale nonché di quelle di carattere circuitale o di progetto va al di là degli scopi di questi Appunti.

10.2.1 Effetto Doppler e applicazioni radar

L'effetto Doppler è un fenomeno che interessa ogni tipo di propagazione ondosa, tanto quella di natura elettromagnetica quanto quella di origine meccanica (ad es. il suono). Esso consiste nello spostamento della frequenza dell'onda che si verifica allorché la sorgente e l'osservatore sono in moto relativo l'una rispetto all'altro. Di seguito si riportano alcuni brevi passaggi che

consentono di pervenire ad un'espressione analitica per quello che la letteratura anglosassone denomina *Doppler shift*. Prendiamo in considerazione a questo scopo un radar CW che utilizza segnali sinusoidali di periodo T_0 e frequenza f , cui corrisponde una lunghezza d'onda λ . Per semplicità di calcolo supponiamo che il radar sia fermo ed il bersaglio in movimento alla velocità costante v verso il radar (vedi Fig.10.3). Fissiamo l'istante di tempo $t = t_0$ in corrispondenza di un massimo dell'onda trasmessa, indichiamo con A tale massimo e chiamiamo R_0 la distanza del bersaglio dal radar nel medesimo istante di tempo (vedi Fig.10.4); si noti che l'aver fissato l'istante di tempo t_0 in modo tale che in corrispondenza di esso l'onda trasmessa assuma un massimo è una scelta del tutto arbitraria; dopo un periodo di tempo T_0 la stessa onda assume un altro massimo che indichiamo con B. Al tempo $t = t_0 + T_0$ la distanza dell'oggetto dal radar è cambiata in R_1 . Il tempo Δt impiegato dal massimo A per giungere al bersaglio è la distanza

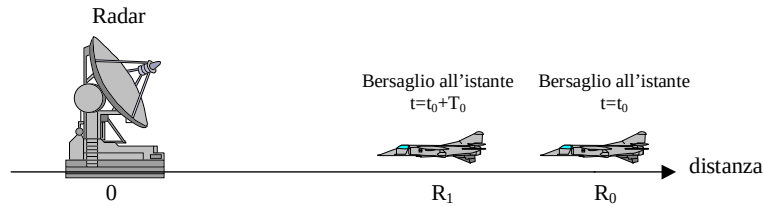


Figura 10.3. Geometria del problema.

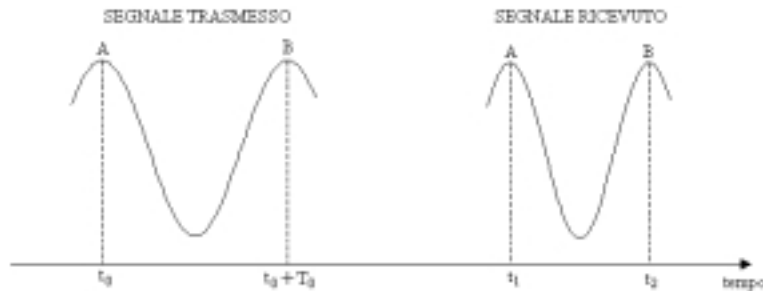


Figura 10.4. Segnali trasmesso e ricevuto (effetto Doppler).

percorsa per raggiungere il bersaglio divisa per la velocità della luce; dato che il bersaglio si sposta, la distanza corrispondente è $R_0 - v\Delta t$ e

$$\Delta t = \frac{R_0 - v\Delta t}{c} \quad (10.5)$$

ovvero

$$\Delta t = \frac{R_0}{c + v} \quad (10.6)$$

Lo stesso tempo viene impiegato dal massimo per ritornare al radar all'istante t_1 , che vale allora:

$$t_1 = t_0 + \frac{2R_0}{c + v} \quad (10.7)$$

Un discorso analogo vale per il massimo B, il quale tuttavia giunge nuovamente al radar solo al tempo t_2 :

$$t_2 = t_0 + T_0 + \frac{2R_1}{c + v} \quad (10.8)$$

Il periodo del segnale ricevuto è dunque diverso da quello del segnale trasmesso e vale:

$$T'_0 = t_2 - t_1 = T_0 - \frac{2 \cdot (R_0 - R_1)}{c + v} \quad (10.9)$$

dove si è messa in evidenza la distanza $vT_0 = R_0 - R_1$ percorsa dall'oggetto nell'intervallo di tempo T_0 . Quest'ultima relazione mostra come il periodo della forma d'onda ricevuta sia minore di quello del segnale trasmesso (o, che è lo stesso, come la frequenza della prima sia maggiore di quella del secondo). Con la finalità di individuare lo spostamento di frequenza dovuto all'effetto Doppler sviluppiamo l'espressione precedente ricordando che $vT_0 = R_0 - R_1$, da cui

$$T'_0 = T_0 \frac{c - v}{c + v} \quad (10.10)$$

$$f' = f \frac{1 + v/c}{1 - v/c} \quad (10.11)$$

Essendo in pressoché tutti i casi di interesse pratico la velocità del bersaglio notevolmente inferiore a quella della luce,

$$\frac{v}{c} \ll 1 \quad (10.12)$$

si può sviluppare in serie di Taylor la frazione $\frac{1}{1 - v/c}$ nella (10.11).

Ricordando lo sviluppo $\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots$:

$$f' = f \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) = f \cdot \left(1 + \frac{2v}{c} + \frac{2v^2}{c^2} + \dots\right) \quad (10.13)$$

Arrestando lo sviluppo al primo ordine si può scrivere

$$f' = f \cdot \left(1 + \frac{2v}{c}\right) = f + \frac{2v}{\lambda} \quad (10.14)$$

Nel caso in cui il bersaglio si allontanasse dal radar si otterrebbe lo stesso risultato, a meno del segno; si avrebbe cioè:

$$f' = f \cdot \left(1 - \frac{2v}{c}\right) = f - \frac{2v}{\lambda} \quad (10.15)$$

Si ricava così lo spostamento di frequenza dovuto all'effetto Doppler (*Doppler frequency shift*):

$$f_d = \frac{2v}{\lambda} \quad (10.16)$$

Si capisce da quest'ultima relazione che la velocità v del bersaglio può essere ricavata dalla misura dello spostamento di frequenza Doppler

$$v = \frac{f_d \lambda}{2} \quad (10.17)$$

(λ è la lunghezza d'onda del segnale trasmesso) e che tale misurazione richiede, almeno nella forma più semplice di radar CW, un'onda sinusoidale (almeno per tutto l'intervallo di misura), per la quale ha senso parlare di frequenza e di lunghezza d'onda. In tali sistemi, come mostra la Fig.10.5, l'individuazione di f_d è compito del ricevitore.

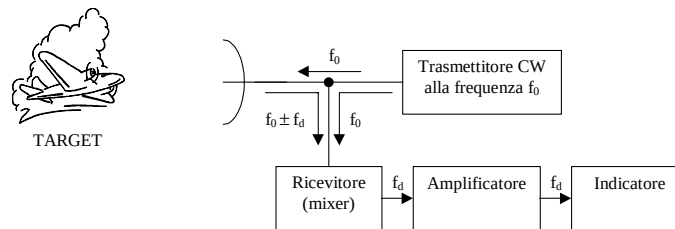


Figura 10.5. Diagramma a blocchi di un radar CW semplice.

10.3 Le frequenze del radar

Le applicazioni radar interessano solo una parte dello spettro elettromagnetico, quella che va dalla banda di frequenze HF alla banda K_a (vedi Tabella 1.2). Frequenze superiori sono utilizzate per ora solo in via sperimentale. Di seguito viene riportata la Tabella 10.1 con informazioni più dettagliate sulle bande di frequenza e sul loro utilizzo nelle applicazioni radar.

Banda di frequenze	Intervallo di frequenze	Utilizzo radar
HF	3-30 MHz	Sorveglianza OTH
VHF	30-300 MHz	Sorveglianza a distanza molto elevata
UHF	300-1000 MHz	Sorveglianza a distanza molto elevata
L	1-2 GHz	Sorveglianza a distanza elevata Controllo del traffico in volo
S	2-4 GHz	Sorveglianza a media distanza Controllo del traffico aereo Meteo a lunga distanza
C	4-8 GHz	Intercettazione a lunga distanza
X	9-12 GHz	Intercettazione a breve distanza Guida di missili Mappaggio Radar marittimi
K_u	12-18 GHz	Intercettazione di velivoli Mappaggio ad alta risoluzione Altezza dei satelliti
K	18-27 GHz	Uso minore (vapor acqueo)
K_a	27-40 GHz	Mappaggio a risoluzione molto elevata
Onde millimetriche	40-100 GHz	Sorveglianza aeroportuale Sperimentazione

Tabella 10.1. Bande di frequenze radar e loro utilizzo.

10.4 Equazione del radar e radar cross section (RCS)

L'equazione del radar mette in relazione tra loro la distanza dell'oggetto dal radar, le caratteristiche del trasmettitore, del ricevitore, dell'antenna, del bersaglio e dell'ambiente. Di seguito viene ricavata *la forma semplice dell'equazione del radar*, nel caso più generale di radar bi-statico; il passaggio al caso monostatico risulta, come si vedrà, immediato. Con riferimento alla Fig.10.6, indichiamo con P_{al} la potenza erogata all'antenna trasmittente, con R_i ed R_s le distanze tra antenna in trasmissione e bersaglio e tra bersaglio e antenna in ricezione rispettivamente e, infine, con $\hat{r}_i$ ed $\hat{r}_s$ i versori che individuano le direzioni in cui sono misurate tali

distanze. Per definire le proprietà di reirradiazione di un oggetto si parte dalla definizione della

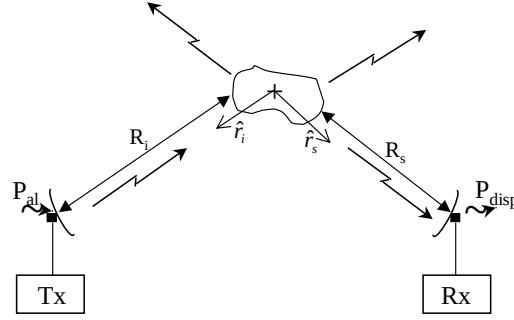


Figura 10.6. Rappresentazione schematica di un radar bistatico.

sezione radar (*radar cross section*, RCS , secondo le considerazioni che seguono).

Nel punto di osservazione Q dell'eco radar (dove è posta l'antenna ricevente), l'onda incidente è quella "scatterata" (re-irradiata) dal bersaglio, cioè

$$\left(\frac{dP}{d\Sigma}\right)_{inc,RX} = \left(\frac{dP}{d\Sigma}\right)_{scat,B}$$

Si introduce allora una "potenza isotropica equivalente" di re-irradiazione P_{eq}^{iso} tale che

$$\left(\frac{dP}{d\Sigma}\right)_{scat,B} = \frac{P_{eq}^{iso}}{4\pi R_s^2}$$

ovvero anche (usando la densità di potenza per unità di angolo solido),

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{inc,RX} = \left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{scat,B} = \frac{P_{eq}^{iso}}{4\pi} \quad (10.18)$$

Il significato di P_{eq}^{iso} è che se al posto del bersaglio illuminato dall'onda emessa dalla trasmittente ci fosse una sorgente isotropica, allora questa dovrebbe avere una potenza di alimentazione P_{eq}^{iso} per dare nel punto di osservazione la stessa $\left(\frac{dP}{d\Sigma}\right)$ provocata dallo "scattering".

Si definisce quindi sezione radar di un oggetto la grandezza σ che, moltiplicata per la densità di potenza incidente sul bersaglio genera la potenza equivalente P_{eq}^{iso}

$$P_{eq}^{iso} = \sigma \left(\frac{dP}{d\Sigma}\right)_{inc,B} \quad (10.19)$$

che, se irradiata isotropicamente, produce al ricevitore la stessa densità di potenza per unità di angolo solido

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{inc,RX} = \left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{scat,B} = \frac{P_{eq}^{iso}}{4\pi} \quad (10.20)$$

che il bersaglio reale effettivamente produce, cioè:

$$\sigma(\hat{r}_i; \hat{r}_s) = 4\pi \frac{(dP/d\Omega)_{scat,B}}{(dP/d\Sigma)_{inc,B}} \quad (10.21)$$

Tale grandezza quantifica la capacità di un oggetto di riflettere le onde elettromagnetiche ed è misurata in m². La sezione radar può essere esplicitata in termini di campo (è utile questo approccio quando si debbano svolgere calcoli analitici o numerici) ricordando che

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{scat,B} = \frac{R_s^2 |\underline{E}_s|^2}{2Z_0} \quad (10.22)$$

$$\left(\frac{dP}{d\Sigma}\right)_{inc,B} = \frac{|\underline{E}_i|^2}{2Z_0} \quad (10.23)$$

dove $\underline{E}_s$ è il campo reirradiato dal bersaglio mentre $\underline{E}_i$ è il campo incidente sul bersaglio. In questo modo si ottiene la seguente relazione

$$\sigma(\hat{r}_i; \hat{r}_s) = 4\pi R_s^2 \frac{|\underline{E}_s|^2/2Z_0}{|\underline{E}_i|^2/2Z_0} = 4\pi R_s^2 \left| \frac{\underline{E}_s}{\underline{E}_i} \right|^2 \quad (10.24)$$

Dato che la (10.22) vale in condizioni di campo lontano e la (10.23) vale nel caso di incidenza di onda piana, si definisce formalmente la sezione radar come

$$\sigma(\hat{r}_i; \hat{r}_s) = \lim_{R_s \rightarrow \infty} 4\pi R_s^2 \left| \frac{\underline{E}_s}{\underline{E}_i} \right|^2 \quad (10.25)$$

Ci occupiamo ora di calcolare quale parte della potenza irradiata dall'antenna in trasmissione venga ricevuta come eco radar dall'antenna in ricezione. La densità di potenza (per unità di angolo solido) irradiata da un'antenna può essere messa in relazione con la potenza di alimentazione tramite la (10.26):

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{irr} = g_t(\hat{r}_i) \frac{P_{al}}{4\pi} \quad (10.26)$$

dove $g_t(\hat{r}_i)$ è il guadagno dell'antenna in trasmissione. Supponendo trascurabili gli effetti dissipativi dovuti ad assorbimento atmosferico si ha

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{inc,B} = \left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{irr} \quad (10.27)$$

La densità di potenza incidente sul bersaglio è

$$\left(\frac{dP}{d\Sigma}\right)_{inc,B} = \frac{P_{al} g_t(\hat{r}_i)}{4\pi R_i^2} \quad (10.28)$$

mentre la potenza per angolo solido (misurata in $\frac{W}{sr}$) reirradiata nella direzione dell'antenna in ricezione è

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{scat,B} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{P_{al} g_t(\hat{r}_i)}{4\pi R_i^2} \cdot \sigma(\hat{r}_i; \hat{r}_s) \quad (10.29)$$

Si noti che tale densità di potenza è diversa (in generale) a seconda della direzione $\hat{r}_s$ considerata. Infine la densità di potenza che ritorna alla stazione ricevente è

$$\left(\frac{dP}{d\Sigma}\right)_{inc, R_X} = \frac{P_{al} g_t(\hat{r}_i)}{4\pi R_i^2} \cdot \frac{\sigma}{4\pi R_s^2} \quad (10.30)$$

La potenza che giunge al ricevitore della stazione ricevente dipende dall'area equivalente dell'antenna in ricezione:

$$A_{eq} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot g_r(\hat{r}_s) \quad (10.31)$$

Si ottiene infine l'equazione del radar:

$$P_{disp} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{P_{al} \cdot g_t(\hat{r}_i)}_{\text{potenza irradiata nella direzione del bersaglio}} \cdot \frac{1}{4\pi R_i^2} \cdot \sigma}_{\text{densità di potenza al bersaglio}} \cdot \frac{1}{4\pi R_s^2} \cdot A_{eq}}_{\substack{\text{potenza reirradiata nella direzione del radar} \\ \text{densità di potenza della radiazione riflessa in prossimità del radar} \\ \text{potenza al ricevitore del radar}}} \quad (10.32)$$

Sostituendo la (10.31) nella (10.32), l'equazione del radar diventa:

$$P_{disp} = \frac{P_{al} g_t(\hat{r}_i) g_r(\hat{r}_s) \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R_i^2 R_s^2} \quad (10.33)$$

Qualora antenna in trasmissione e antenna in ricezione coincidano (radar monostatico), la relazione precedente diventa:

$$P_{disp} = \frac{P_{al} g^2(\hat{r}) \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4} \quad (10.34)$$

Questa risulta essere la formulazione più semplice dell'equazione del radar (formulazione che ricorda formalmente l'equazione della trasmissione 8.6). Una forma più precisa ma necessariamente più complessa si può ottenere prendendo in considerazione parametri a questo livello trascurati, quali il mezzo di propagazione, il rumore introdotto dall'atmosfera terrestre, perdite attribuibili ai componenti del sistema o al processamento del segnale, rumore termico, etc. Nondimeno essa è utile da un lato alla comprensione dei principi di base che caratterizzano un sistema radar, dall'altro ad una valutazione quantitativa, per quanto approssimata, dei parametri di progetto.

Un importante indice delle prestazioni di un radar monostatico è la massima distanza R_{max} alla quale esso è in grado di rilevare la presenza di un oggetto (*maximum detection range*). La sua espressione si ricava dall'equazione del radar (10.33). Quando un oggetto si trova a tale distanza, infatti, la potenza del segnale ricevuto dal radar P_{disp} è eguale a quella del minimo segnale rilevabile S_{min} , si ha cioè:

$$R_{max} = \left[\frac{P_{disp} G A_{eq} \sigma}{(4\pi)^2 S_{min}} \right]^{1/4} \quad (10.35)$$

che è come dire, ricordando la relazione che lega l'area equivalente al guadagno

$$R_{max} = \left[\frac{P_{disp} G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 S_{min}} \right]^{1/4} \quad (10.36)$$

10.5 Esempio di RCS: sfera conduttrice

Il calcolo analitico esatto della sezione radar di un oggetto è generalmente complesso. Esso risulta, tuttavia, relativamente semplice nel caso di una sfera¹. La sezione radar di una sfera conduttrice in funzione della sua circonferenza misurata in lunghezze d'onda $\frac{2\pi a}{\lambda}$ è riportata nel grafico di Fig.10.7. Su detto grafico è possibile individuare tre differenti regioni. La regione in

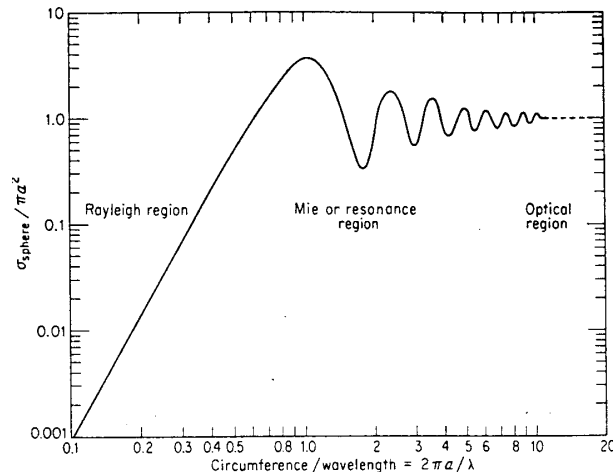


Figura 10.7. Sezione radar di una sfera. a = raggio; λ = lunghezza d'onda.

cui la sfera ha dimensioni piccole rispetto alla lunghezza d'onda è chiamata *regione di Rayleigh*. In corrispondenza di questa regione la sezione radar della sfera cresce con la frequenza con una

Bersagli	RCS (in m ²)
Missile convenzionale	0.5
Velivolo piccolo ad un solo motore	1
Caccia piccolo o jet a 4 passeggeri	2
Caccia grande	6
Bombardiere medio o medio jet di linea	20
Bombardiere grande o grande jet di linea	40
Jumbo jet	100
Piccolo battello	0.02
Piccolo battello da diporto	2
Incrociatore	10
Camioncino	200
Automobile	100
Bicicletta	2
Uomo	1
Uccello	0.01
Insetto	10 ⁻⁵

Tabella 10.2. Esempi di radar cross section misurate alle frequenze tipiche delle microonde.

legge approssimativamente lineare. La regione opposta alla precedente (a destra nel grafico) è detta *regione ottica*. In tale regione, come si vede, la sezione radar della sfera tende a πa^2 . Tale valore è indipendente dalla frequenza, non solo, ma è anche eguale alla sezione ottica della sfera stessa: πa^2 è infatti l'area del cerchio che ha per raggio il medesimo raggio della sfera. La regione di mezzo infine, detta *regione risonante*, vede oscillare con la frequenza la sezione radar. Si noti che, essendo l'oggetto in questione sferico, la sezione radar è indipendente dalla

¹vedi Skolnik, M.I.: *Introduction to radar systems*, 2nd edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1980

direzione dalla quale viene osservato dal radar. Alcuni valori noti per le sezioni radar (misurate alle frequenze tipicamente in uso per i radar (microonde), relativi agli oggetti in questione, per esempio marittimo per un battello, etc.) di oggetti di interesse pratico sono riportati nella Tabella 10.2.

11

Legame con le equazioni dei circuiti

11.1 Derivazione delle equazioni di Kirchhoff dalle equazioni di Maxwell

Nel paragrafo 3.2.2 si è derivata la caratterizzazione circuitale di un'antenna a due morsetti, sfruttando le leggi dell'Elettrotecnica applicate ai terminali d'ingresso. Per capire fino a quale livello di approssimazione sia valida la teoria vista vogliamo ora determinare come possono essere derivate le equazioni che governano l'Elettrotecnica (essenzialmente le leggi di Kirchhoff) da quelle dell'Elettromagnetismo (leggi di Maxwell).

Consideriamo quindi le equazioni di Maxwell nella loro formulazione definita e asimmetrica ($\underline{J}_m = 0$)

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{H} = j\omega(\epsilon \underline{E}) + \underline{J}_e \\ -\nabla \times \underline{E} = j\omega(\mu \underline{H}) \end{cases} \quad (11.1)$$

Il termine $j\omega(\epsilon \underline{E})$ è detto corrente di spostamento elettrico, ed esprime il passaggio dal caso magnetostatico

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J}_e \quad (11.2)$$

a quello elettromagnetico (dinamico)

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega(\epsilon \underline{E}) + \underline{J}_e \quad (11.3)$$

(infatti nel caso magnetostatico $j\omega = 0$). Le leggi di Kirchhoff possono essere applicate a circuiti

1. in corrente continua (DC)
2. in corrente alternata (AC) a “bassa frequenza”, ovvero per tutti quei valori di frequenza per cui sia possibile trascurare le dimensioni circuitali rispetto alla lunghezza d'onda.

Con queste ipotesi si definiscono

- V , potenziale elettrico, dato dalla relazione

$$\underline{E} = -\nabla V \quad (11.4)$$

dove $\underline{E}$ viene detto campo irrotazionale in senso stretto (in continua) o in senso lato (in alternata).

- I corrente di conduzione, forzata sui conduttori tra i quali è stata applicata una differenza di potenziale.

Possiamo notare che

- le equazioni di Maxwell sono riconducibili ad un sistema di 4 equazioni scalari accoppiate attraverso derivate parziali;
- le equazioni di Kirchhoff sono due equazioni scalari accoppiate da derivate ordinarie.

Appare allora chiara l'esigenza di utilizzare le leggi di Kirchhoff per la simulazione di circuiti elettrici dovunque possibile (si ottiene una drastica semplificazione di analisi).

L'obiettivo, ora che ci occupiamo di condizioni più generali, è quello di determinare quali sono i termini che vengono trascurati nell'utilizzare le leggi dell'elettrotecnica. Si consideri a tale scopo una superficie Σ_c attraversata dalle linee di corrente in Fig. 11.1. Se $\hat{n}$ è il versore

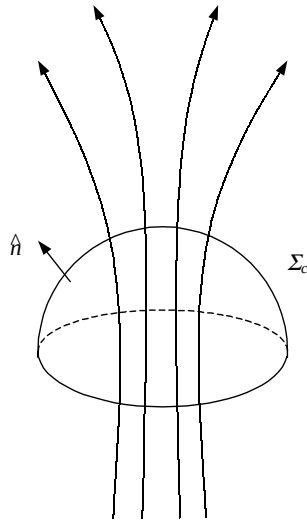


Figura 11.1. Superficie Σ_c attraversata da linee di corrente.

normale alla superficie in ogni suo punto, integrando le equazioni di Maxwell rispetto a Σ_c si ottiene

$$\int_{\Sigma_c} d\Sigma \hat{n} \cdot \nabla \times \underline{H} = j\omega \int_{\Sigma_c} d\Sigma (\epsilon \underline{E}) \cdot \hat{n} + \int_{\Sigma_c} d\Sigma (\hat{n} \cdot \underline{J}_e) \quad (11.5)$$

L'integrale

$$\int_{\Sigma_c} d\Sigma (\hat{n} \cdot \underline{J}_e) = I_{\Sigma_c} \quad (11.6)$$

rappresenta la corrente totale nel senso “usuale” (corrente di conduzione) che attraversa Σ_c , mentre

$$\int_{\Sigma_c} d\Sigma (\epsilon \underline{E}) \cdot \hat{n} = \Phi_D \quad (11.7)$$

è detto *flusso dielettrico*. L'integrale di superficie a primo membro dell'Eq. (11.5) può essere trasformato in un integrale di linea sfruttando il teorema di Stokes

$$\int_{\Sigma_c} d\Sigma \hat{n} \cdot \nabla \times \underline{H} = \oint_{\gamma=\partial\Sigma_c} ds \hat{\tau} \cdot \underline{H} \quad (11.8)$$

dove γ rappresenta il bordo di Σ_c e $\hat{\tau}$ è il versore tangente alla curva in ogni suo punto. L'espressione precedente viene scritta come segue:

$$\oint_{\gamma} ds \hat{\tau} \cdot \underline{H} = j\omega\Phi_D + I_{\Sigma_c} \quad (11.9)$$

ed è l'equivalente scalare dell'equazione di Maxwell di partenza. In condizioni statiche si ha $\Phi_D = 0$ per cui

$$I_{\Sigma_c} = \oint_{\gamma} ds \hat{\tau} \cdot \underline{H} \quad (11.10)$$

La corrente è pari dunque alla circuitazione del campo magnetico, e l'approssimazione è valida anche nel caso dinamico, purché $j\omega\Phi_D \simeq 0$, ovvero a “basse frequenze”. Dall'Eq. (11.10) si nota che la corrente dipende solo dal contorno γ della superficie Σ_c . Possiamo allora pensare di stringere la curva γ fino a “strozzarla”, cioè di far tendere a zero la sua misura (vedi Fig. 11.2). In queste condizioni la superficie Σ_c tende a diventare una superficie chiusa, dunque

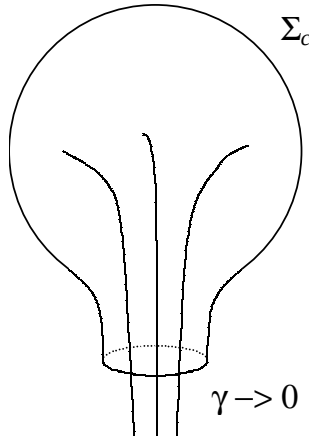


Figura 11.2. Superficie Σ_c di cui si “strozza” il bordo.

$$\oint_{\gamma} ds \hat{\tau} \cdot \underline{H} = 0 \Rightarrow j\omega\Phi_D + I_{\Sigma_c} = 0 \quad (11.11)$$

Allora, nelle condizioni in cui è possibile trascurare il termine $j\omega\Phi_D$, si perviene alla prima equazione di Kirchhoff, cioè la legge di Kirchhoff per i nodi (o delle correnti)

$$I_{\Sigma_c} = 0 \Rightarrow \sum_n I_n = 0 \quad (11.12)$$

Procedendo nello stesso modo per la seconda equazione di Maxwell abbiamo

$$-\nabla \times \underline{E} = j\omega(\mu\underline{H}) \quad (11.13)$$

Si integrano ambo i membri rispetto alla superficie Σ_c

$$-\int_{\Sigma_c} d\Sigma \hat{n} \cdot \nabla \times \underline{E} = j\omega \int_{\Sigma_c} d\Sigma \hat{n} \cdot (\mu\underline{H}) \quad (11.14)$$

dove

$$\Phi_B = \int_{\Sigma_c} d\Sigma \hat{n} \cdot (\mu \underline{H}) \quad (11.15)$$

è detto *flusso magnetico*. A primo membro utilizzando la relazione di Stokes abbiamo

$$\oint_{\gamma} ds \hat{\tau} \cdot \underline{E} = -j\omega \Phi_B \quad (11.16)$$

Nel caso statico in bassa frequenza possiamo trascurare il secondo membro per cui

$$\oint_{\gamma} ds \hat{\tau} \cdot \underline{E} = 0 \quad (11.17)$$

L'Eq.(11.17) implica che il campo elettrico sia irrotazionale. Si consideri ora una superficie il cui bordo è a contatto con i due conduttori A e B , come in Fig. 11.3. Possiamo spezzare il

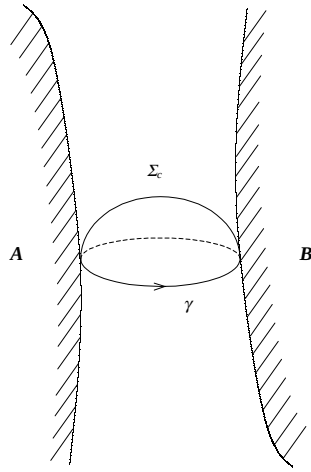


Figura 11.3. Superficie Σ_c con bordo a contatto con i conduttori A e B .

percorso chiuso γ nella somma di due percorsi, il primo diretto da A verso B , il secondo da B verso A . Abbiamo

$$\oint_{\gamma} (\dots) = 0 \Rightarrow \int_A^B (\dots) = - \int_B^A (\dots) \quad (11.18)$$

indipendentemente dal percorso per andare da A a B . Possiamo allora definire una differenza di potenziale tra A e B V_{AB} , funzione soltanto dei punti A e B ,

$$\oint_{\gamma} ds \hat{\tau} \cdot \underline{E} = 0 \Rightarrow \int_A^B ds \hat{\tau} \cdot \underline{E} = V_{AB} \quad (11.19)$$

Da quest'ultima formula discende la seconda equazione di Kirchhoff, cioè la legge di Kirchhoff alle maglie (o delle tensioni).

In conclusione l'approssimazione che si introduce analizzando un circuito con le leggi di Kirchhoff anziché con quelle di Maxwell è tanto più buona quanto più piccoli sono i termini Φ_D e Φ_B .

11.2 Caratterizzazione di un N -polo

Un N -polo è un componente circuitale caratterizzato da una superficie Σ_c , dalla quale fuoriescono N terminali. Una generica superficie costituisce un N -polo quando $j\omega\Phi_D \ll I_{\Sigma_c}$ e $j\omega\Phi_B \simeq 0$. Non importa quanto sia intenso il flusso magnetico o dielettrico all'interno di Σ_c , ma quello che fuoriesce dalla superficie deve essere comunque trascurabile. Analizziamo il caso di bipolo ($N = 2$), considerando la Fig. 11.4. Al di fuori di Σ_c devono essere valide le leggi dell'

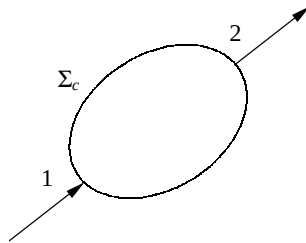


Figura 11.4. Superficie Σ_c che identifica un bipolo.

l'Elettrotecnica, per cui la corrente che entra nel morsetto 1 deve uscire dal morsetto 2, e deve esistere una differenza di potenziale tra i due morsetti indipendente dal percorso che li unisce. Si noti che non è affatto detto che le leggi di Kirchhoff continuino a valere anche all'interno di Σ_c ; un esempio pratico di quest'ultimo aspetto è rappresentato da induttori e condensatori. Consideriamo, ad esempio, le armature di un condensatore piano ed una superficie Σ_c che ne contenga solo una, come mostrato in Fig. 11.5. All'interno del dielettrico non vi è alcun

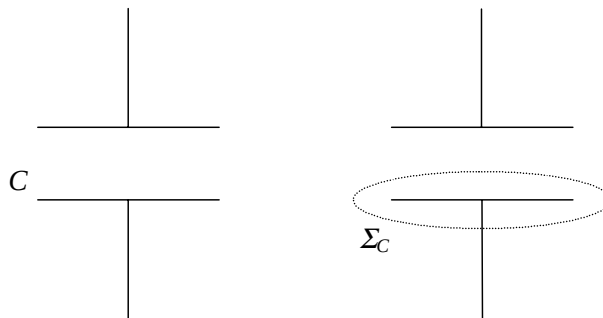


Figura 11.5. Superficie Σ_c che comprende solo un'armatura di un condensatore piano.

passaggio di cariche associate a portatori. Vi sarà però una corrente di spostamento che impedisce di considerare la struttura identificata dalla superficie Σ_c come un N -polo (le equazioni di Maxwell non possono essere approssimabili da quelle di Kirchhoff); questo significa che le leggi dell'Elettrotecnica valgono purché si rimanga al di fuori di tale zona critica. Vediamo invece cosa succede andando a considerare un induttore (vedi Fig. 11.6). Se la superficie Σ_c è posta vicino all'avvolgimento dell'induttore è possibile dimostrare che $B \propto \frac{1}{R^2}$ e quindi si nota che il campo magnetico non decade molto rapidamente. Una diretta conseguenza di questo è che si possono usare le leggi di Kirchhoff solo ad una certa distanza dall'induttore. Analogamente, nel caso in cui si hanno due induttori L_1 ed L_2 si dovrà scegliere una superficie Σ_c tale per cui $j\omega\Phi_B \approx 0$ ovvero tale da rendere trascurabili non solo gli effetti induttivi dovuti alle singole

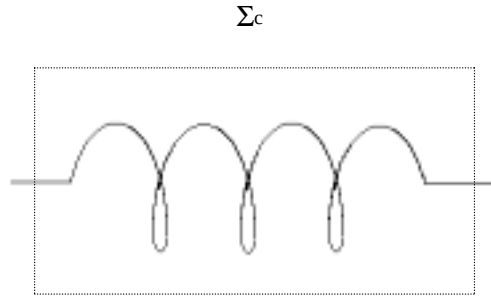


Figura 11.6. Superficie Σ_c che delimita un induttore.

bobine, ma anche l'accoppiamento che si genera tra i campi di L_1 ed L_2 . Si dovranno pertanto considerare due superfici Σ_{c1} e Σ_{c2} sufficientemente distanti in modo tale da trascurare l'effetto di mutua induttanza, oppure, quando la distanza tra L_1 e L_2 non consente di trascurare l'effetto di mutuo accoppiamento se ne dovrà considerare una sola che racchiuda entrambi gli induttori, la quale darà origine ad un quadripolo (trasformatore). Anche per i condensatori vi è un campo elettrico esterno alla superficie racchiusa tra le armature, tuttavia per le basse frequenze tale campo ha un andamento $|\underline{E}| \propto 1/r^3$ che permette di trascurare l'effetto di accoppiamento già a piccole distanze, mentre $|\underline{H}| \propto 1/r^2$ (vedi paragrafo 2.6.1).

11.3 Bipoli e leggi circuitali ad alta frequenza

Da quanto sviluppato nel paragrafo precedente può sembrare difficile assegnare ad un'antenna le proprietà di un bipolo. In realtà è possibile sotto alcune ipotesi; ricapitoliamo ora in quali condizioni valgono le approssimazioni che portano all'impiego delle equazioni di Kirchhoff, trascurando il caso (banale per le antenne) di frequenza nulla:

- all'esterno di superfici chiuse, su cui i termini $j\omega\Phi_B$ e $j\omega\Phi_D$ sono approssimativamente nulli (ovvero $\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{B,D} \approx 0$). Tali condizioni coinvolgono lo spazio e la frequenza e stabiliscono:
 - il limite di validità della teoria dei circuiti.
 - quali dispositivi possono essere descritti come degli N-poli nella teoria dei circuiti (si pensi al precedente esempio per condensatori ed induttori).
- nelle strutture guidanti TEM (cavi coassiali, linee biconiche, linee bifilari, etc), in cui $\underline{E}$ e $\underline{B}$ sono perpendicolari all'asse $\hat{z}$ di propagazione e quindi Φ_B e Φ_D sono nulli su superfici ortogonali alla direzione $\hat{z}$ ($\hat{n}=\hat{z}$), indipendentemente dalla frequenza¹.

¹vedi Savi-Zich, appunti di Campi Elettromagnetici I, Politecnico di Torino, 1998-99.

11.3.1 Strutture guidanti TEM

Allo scopo di capire se ed in quali condizioni si possa considerare un'antenna a due morsetti come un bipolo, riesaminiamo ora in maggior dettaglio il caso del cavo coassiale, assumendo l'asse della guida lungo $\hat{z}$. Poiché nel modo TEM del cavo coassiale $\underline{E} \perp \hat{z}$ e $\underline{H} \perp \hat{z}$ si ha che Φ_B e Φ_D sono uguali a zero su ogni superficie trasversa a $\hat{z}$; inoltre la direzione del campo fa sì che queste condizioni siano indipendenti dalle alte frequenze, sempre che si sia in condizioni di monomodalità. In questo caso l'equazione (11.9) diventa:

$$\oint_{\Gamma_R} ds \hat{\tau} \cdot \underline{H} = j\omega\Phi_D + \sum_n I_n$$

dove $\sum_n I_n$ rappresenta la somma delle correnti di conduzione relative alla curva Γ_R . Riferendoci

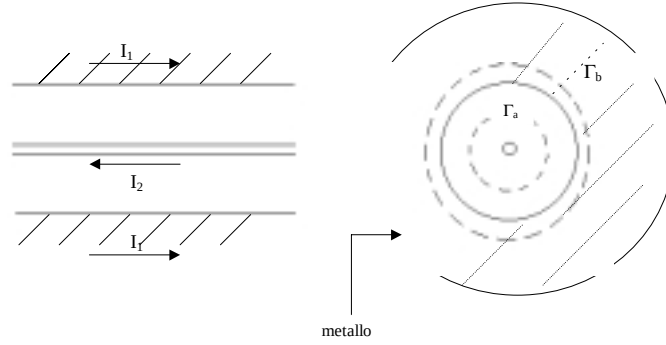


Figura 11.7. Cavo coassiale.

alla Fig. 11.7 possiamo dire che se consideriamo come linea su cui effettuare la circuitazione la curva Γ_a si ha che:

$$\sum_n I_n = I_1(z) \quad (11.20)$$

$$\oint_{\Gamma_a} ds \hat{\tau} \cdot \underline{H} = I_1(z) \quad (11.21)$$

se invece si considera la curva Γ_b , all'interno del metallo del conduttore stesso, segue che:

$$\sum_n I_n = I_1(z) + I_2(z) \quad (11.22)$$

$$\oint_{\Gamma_b} ds \hat{\tau} \cdot \underline{H} = I_1(z) + I_2(z) \quad (11.23)$$

Sappiamo che all'interno di un metallo (considerato ideale) $\underline{H} = 0$, quindi

$$\oint_{\Gamma_b} ds \hat{\tau} \cdot \underline{H} = 0 \quad (11.24)$$

Da questo risultato segue dunque che

$$I_1(z) = -I_2(z) \quad (11.25)$$

cioè la corrente di andata è uguale in modulo alla corrente di ritorno, ma ha verso opposto. Nel cavo coassiale la condizione (11.24) rimane naturalmente valida anche per i modi superiori, mentre in generale $\Phi_D \neq 0$ e quindi $I_1(z) \neq -I_2(z)$. Da questo si deduce che è la corrente di spostamento $j\omega\epsilon\mathbf{E}$ (il cui flusso è Φ_D) a bilanciare le correnti che vanno in direzioni opposte. Passiamo adesso a considerare la linea bifilare, nella quale è possibile dimostrare che esiste un modo TEM e quindi su ogni superficie piana perpendicolare a $\hat{z}$ si ha che $\mathbf{E} \perp \hat{z}$, $\mathbf{H} \perp \hat{z}$, $\Phi_B = 0$ e $\Phi_D = 0$. La linea bifilare è una struttura guidante *aperta*, a differenza del cavo coassiale che invece è una struttura chiusa. Si dimostra che, a grande distanza dai conduttori,

$$\mathbf{H}, \mathbf{E} \propto \cos t \exp(-\alpha R) \quad (11.26)$$

Come per il cavo coassiale analizziamo le correnti di ritorno sfruttando la relazione (11.9):

$$\oint_{\Gamma_R} ds \hat{\tau} \cdot \mathbf{H} = j\omega\Phi_D + I_1(z) + I_2(z)$$

Considerando come linea su cui effettuare la circuitazione una circonferenza Γ_R (vedi Fig. 11.8),

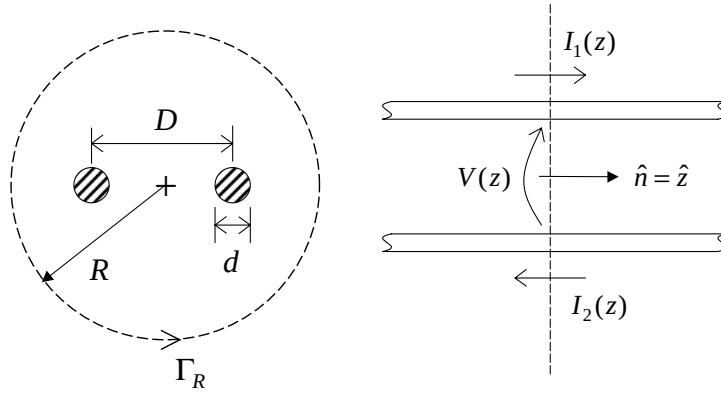


Figura 11.8. Linea bifilare.

poiché il campo decade esponenzialmente con R (mentre la lunghezza di Γ_R cresce linearmente con R), si ha che:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} ds \hat{\tau} \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (11.27)$$

Avendo $j\omega\Phi_D = 0$ (perché il modo è TEM) e $\oint_{\Gamma_R} ds \hat{\tau} \cdot \mathbf{H} \rightarrow 0$ per $R \rightarrow \infty$ si ottiene che $I_1(z) = -I_2(z)$.

11.3.2 Antenna con due morsetti fisici

Ci occupiamo ora di antenne viste come bipoli circuitali. Mentre per le antenne con accesso in guida (vedi tromba, etc.) tutte le relazioni circuitali sono riferite a tensioni e correnti *modali* (non necessariamente misurabili), vogliamo qui vedere se e come si può considerare un'antenna come un componente circuitali (bipolo) interfacciato a reti in cui valgono le leggi di Kirchhoff, nel senso precisato nei paragrafi precedenti. Consideriamo quindi un'antenna con due morsetti

fisici, quale ad esempio il dipolo. Per evidenziarne meglio tali aspetti consideriamo una linea bifilare collegata a un dipolo elettrico simmetrico, e una superficie Σ_c (Fig. 11.9), costituita da un piano parallelo al dipolo e perpendicolare alla linea di accesso (superficie chiusa all'infinito).

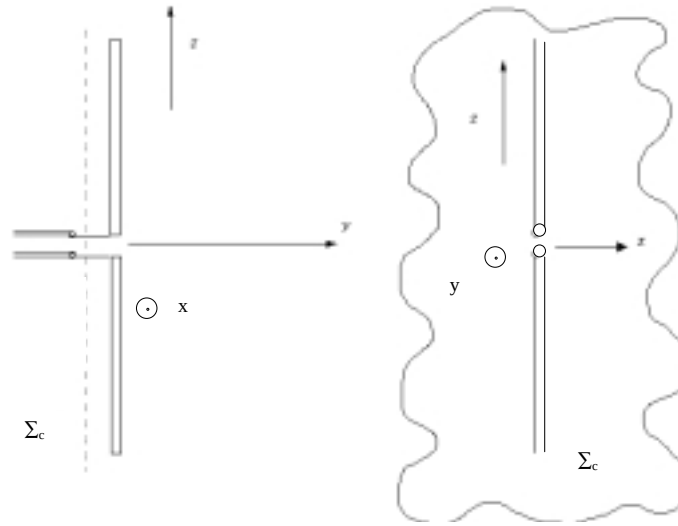


Figura 11.9. Antenna con due stili di uguali dimensioni.

Abbiamo visto che nel cavo coassiale e nella linea bifilare, in modo TEM, Φ_B e Φ_D risultavano nulli in quanto $\underline{E} \cdot \hat{n} = e \underline{H} \cdot \hat{n} = 0$; adesso invece la presenza della radiazione del dipolo modifica le considerazioni precedenti e dunque:

- I flussi Φ_D e Φ_B non sono trascurabili, soprattutto in campo vicino;
- In generale $\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} ds \hat{\tau} \cdot \underline{H} \neq 0$, perché su Γ_R $\hat{\tau} = \hat{\phi}$ e $\hat{\tau} \cdot \underline{H} = H_\phi \simeq \frac{1}{R}$ per $R \rightarrow \infty$, mentre la lunghezza di Γ_R è $2\pi R$; ne consegue che in generale $\oint_{\Gamma_R} ds \hat{\tau} \cdot \underline{H}$ è una quantità non nulla.

Tuttavia per un dipolo simmetrico (come in Fig. 11.10), la simmetria della struttura implica simmetria della corrente sul dipolo e quindi dei campi prodotti.

Per comprendere meglio quanto detto rifacciamoci ad un esempio numerico, analizzando un esempio di antenna costituita da due morsetti fisici, sia nel caso simmetrico che in quello asimmetrico. La geometria considerata è quella di Fig. 11.12 in entrambi i casi, con la differenza che nel caso asimmetrico l'antenna ha una sola asta. In quest'ultimo caso l'antenna è un monopolo *sbilanciato*, a differenza del monopolo su piano di massa, nel quale il bilanciamento viene effettuato dall'immagine. Le figure 11.14, 11.16, 11.18, 11.20 riportano i grafici ottenuti per l'andamento del campo per due diverse distanze: $r = 1/6\lambda$ e $r = 2.5\lambda$; per visualizzare meglio l'andamento del campo nelle figure 11.21, 11.22 viene anche riportato l'andamento tridimensionale di esso, mettendo direttamente a confronto i risultati ottenuti nel caso simmetrico e asimmetrico rispettivamente con $r = 1/6\lambda$ e con $r = 2.5\lambda$. Infine in Fig. 11.23 sono riportati i due (diversi) andamenti della distribuzione di corrente, sulla linea bifilare di accesso. Si può vedere che la simmetria rispetto al piano xy genera campi con simmetria *dispari* rispetto a tale piano, come chiaro dall'esempio numerico nelle figure 11.14, 11.16. Si ha che

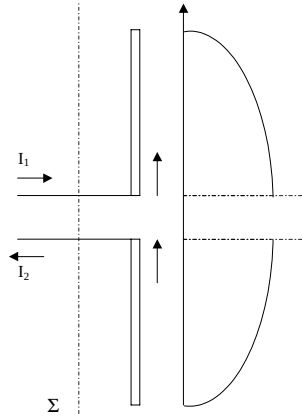


Figura 11.10. Forma qualitativa della corrente per un dipolo costituito da due stecche di uguale dimensione.

$E_y(x,y,z) = -E_y(x,z, -y)$ e lo stesso per le altre componenti del campo elettomagnetico. Sfruttando queste caratteristiche del campo le varie componenti si annullano per cancellazione e rifacendoci all'equazione (11.9) ritroviamo la stessa situazione della linea bifilare, cioè che $I_1 + I_2 = 0$, che si può definire univocamente una tensione tra due morsetti e quindi l'integrale tra due punti non dipende dal percorso effettuato, e che a sinistra del dipolo valgono le leggi di Kirchhoff. Se le due stecche non sono di lunghezza uguale si perde la simmetria e in questo caso essendo la forma delle correnti sul dipolo non simmetrica (vedi Fig. 11.11) si verifica che $\oint_{\Gamma_R} ds \hat{\tau} \cdot \underline{H} \neq 0$ e dunque $I_1(z) \neq I_2(z)$.

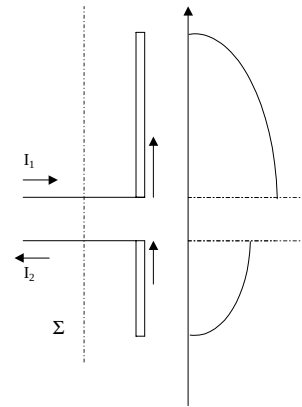


Figura 11.11. Forma qualitativa della corrente per un dipolo costituito da due stecche di diversa dimensione.

L'effetto sulle correnti nella linea bifilare di alimentazione è chiaro dalla Fig 11.23: i moduli sono uguali nel caso simmetrico e palesemente diversi nel caso asimmetrico. Nel caso asimmetrico, in cui $I_1 \neq I_2$, si può separare l'effetto della asimmetria scrivendo $I_2 = -I_0 + I_2d$ (si noti

che $I_2 d = 0$ nel caso simmetrico), con $I_0 = -I_1$; la situazione è dunque equivalente a quella di una linea TEM connessa ad un carico che soddisfa le leggi di Kirchhoff (I_1 sul conduttore 1 e $I_0 = -I_1$ sul conduttore 2) più una corrente $I_2 d$ sul solo conduttore 2. Quest'ultima corrente è detta spesso *modo di antenna* perché, non bilanciata da una corrente contraria, perturba in modo sensibile l'irradiazione dell'antenna, con effetti negativi sul diagramma di irradiazione. Ne segue che un'antenna *sbilanciata* (asimmetrica) irradia e riceve sensibilmente peggio di una *bilanciata* (simmetrica)². Si noti che il monopolo su piano di massa, per via della simmetria dell'immagine che lo rende equivalente al dipolo simmetrico, non ha i problemi del monopolo *sbilanciato* esaminato prima. Dal punto di vista storico questa fu una delle importanti innovazioni di Marconi, realizzata in pratica connettendo un terminale del trasmettitore o ricevitore all'antenna e l'altro a terra.

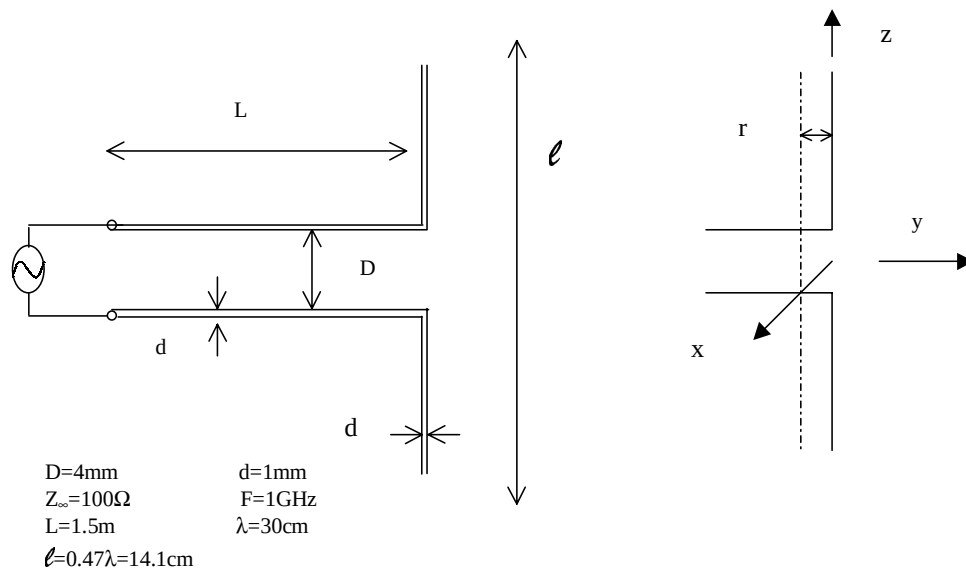


Figura 11.12. Geometria dell'antenna usata per i calcoli numerici, con i relativi dati geometrici (disegno non in scala).

²Tutti i risultati numerici visualizzati sono stati ottenuti usando il programma di calcolo NEC (vedi NEC-2 Manual, Part III: User's Guide).

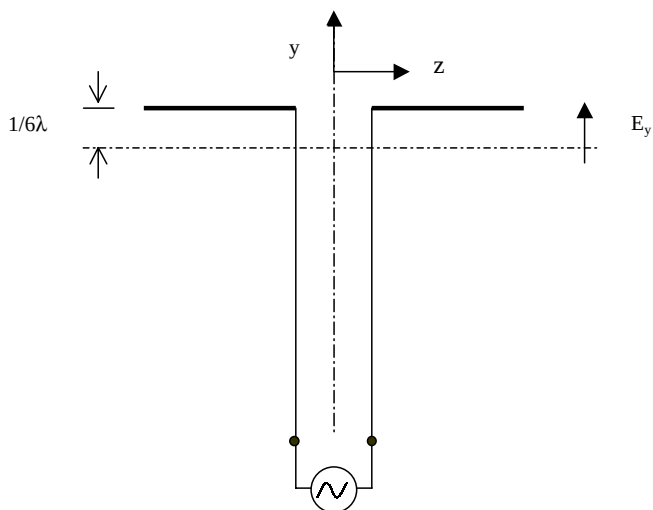


Figura 11.13. Geometria per $r = 1/6\lambda$, dipolo simmetrico (piano yz).

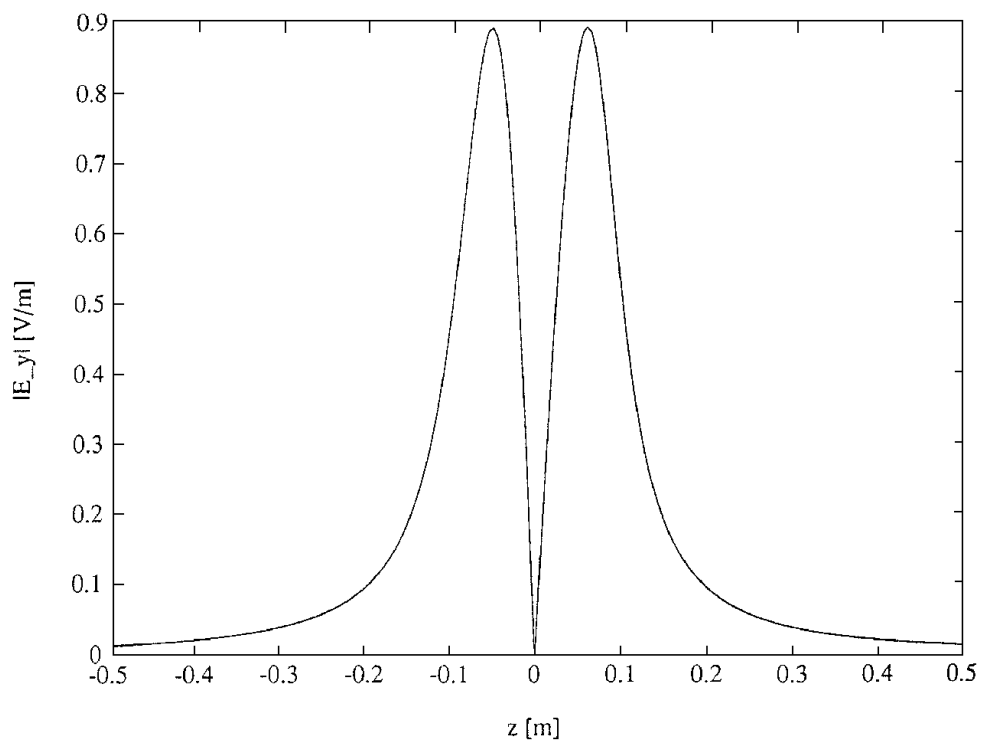


Figura 11.14. Modulo della componente $E_y(0, -r, z)$ per $r = 1/6\lambda$ (Caso simmetrico). La fase per $x > 0$ è opposta a quella per $x < 0$.

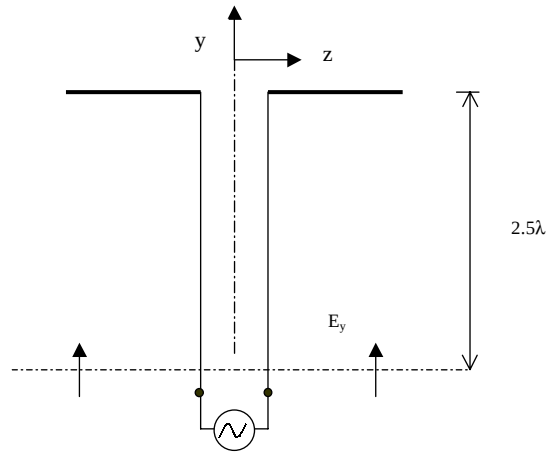


Figura 11.15. Geometria per $r = 2.5\lambda$, dipolo simmetrico (piano yz).

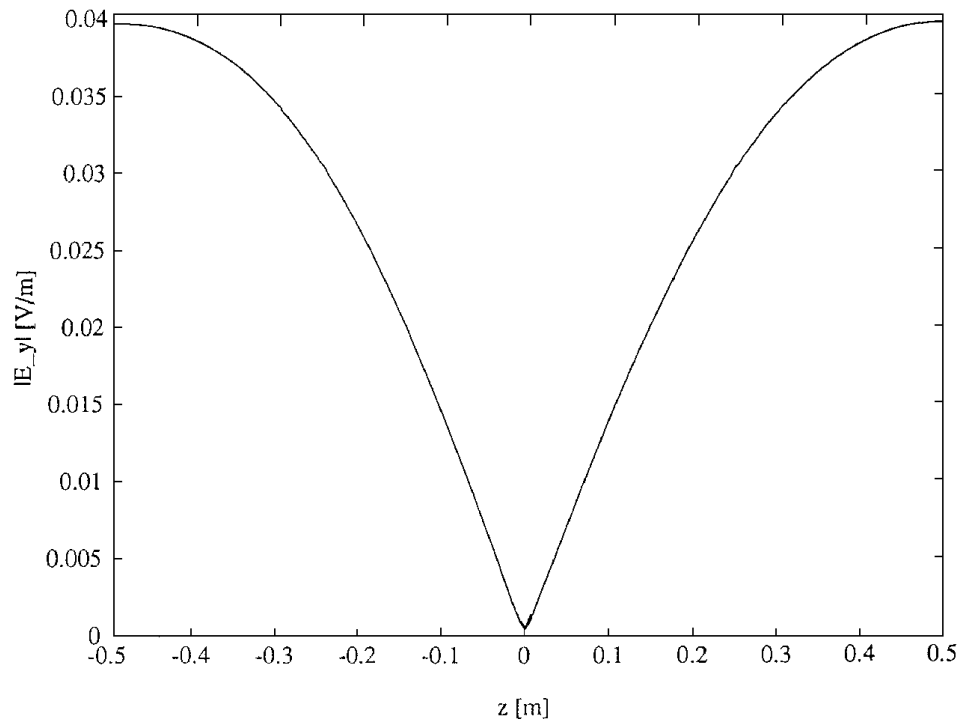


Figura 11.16. Modulo della componente $E_y(0, -r, z)$ per $r = 2.5\lambda$ (Caso simmetrico). La fase per $x > 0$ è opposta a quella per $x < 0$.

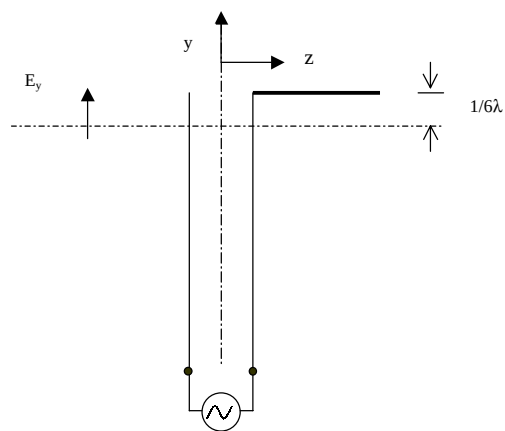


Figura 11.17. Geometria per $r = 1/6\lambda$, caso non simmetrico e monopolo sbilanciato (piano yz).

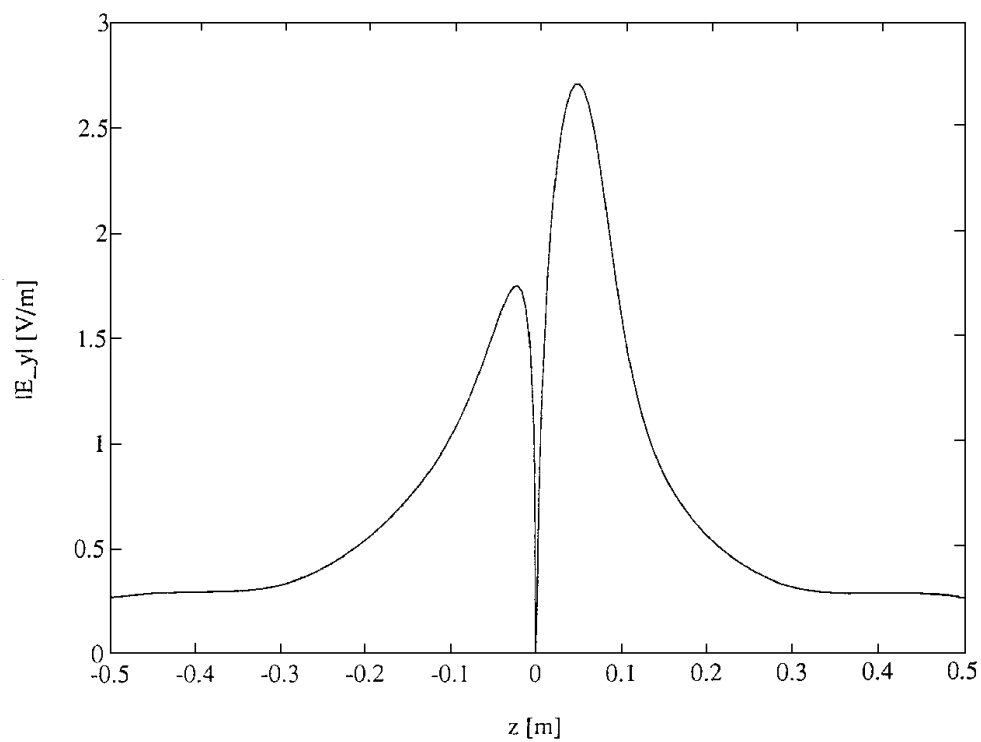


Figura 11.18. Componente $E_y(0, -r, z)$ per $r = 1/6\lambda$ (Caso asimmetrico).

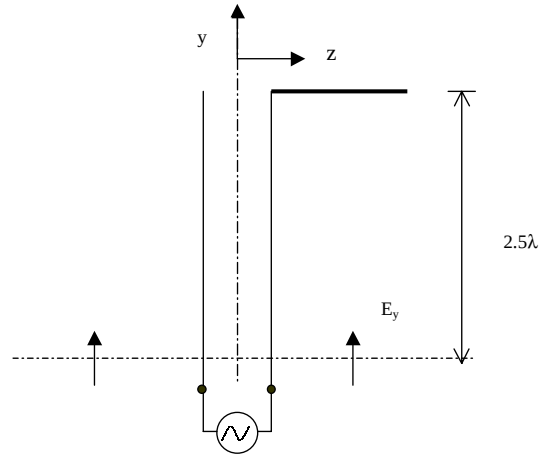


Figura 11.19. Geometria per $r = 2.5\lambda$, caso non simmetrico e monopolo sbilanciato (piano yz).

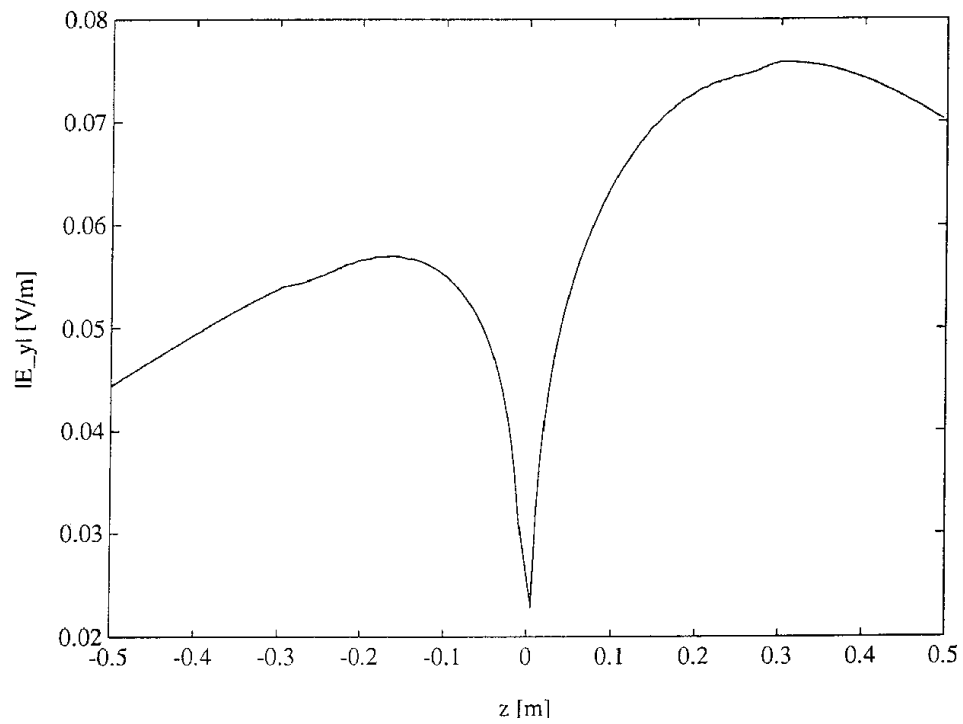


Figura 11.20. Componente $E_y(0, -r, z)$ per $r = 2.5\lambda$ (Caso asimmetrico).

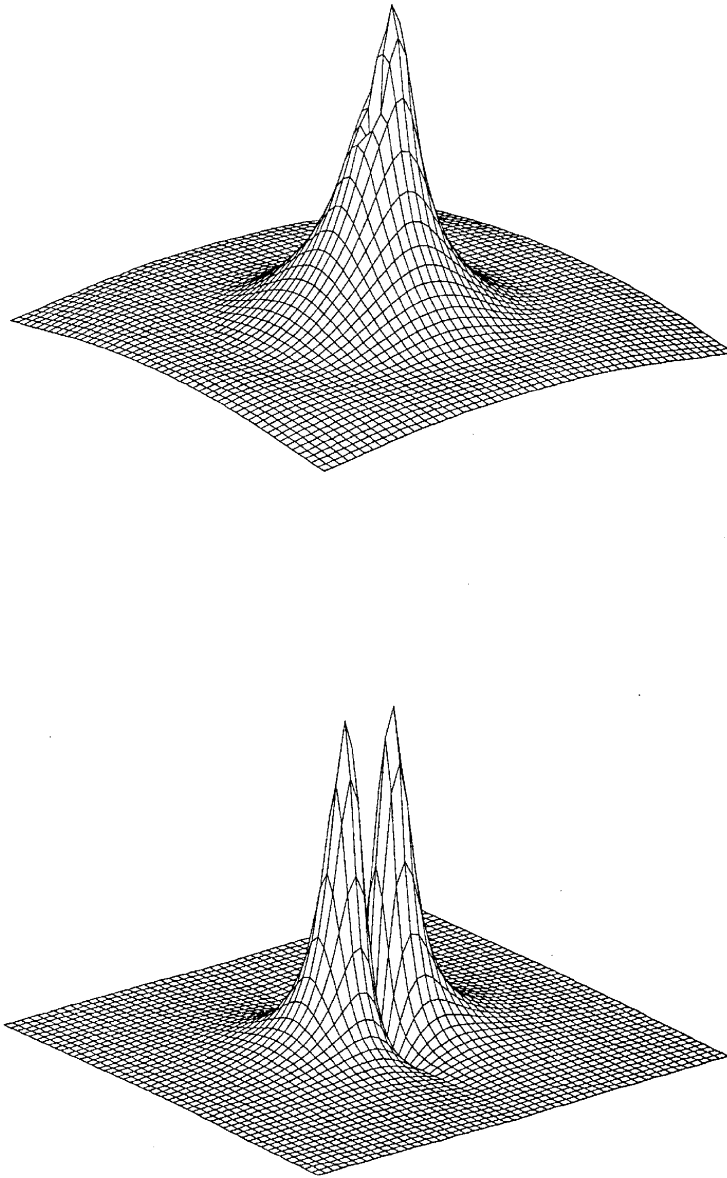


Figura 11.21. Rappresentazione tridimensionale del campo E_y a distanza $r = 1/6\lambda$. In alto abbiamo il caso asimmetrico, mentre in basso vi è quello simmetrico.

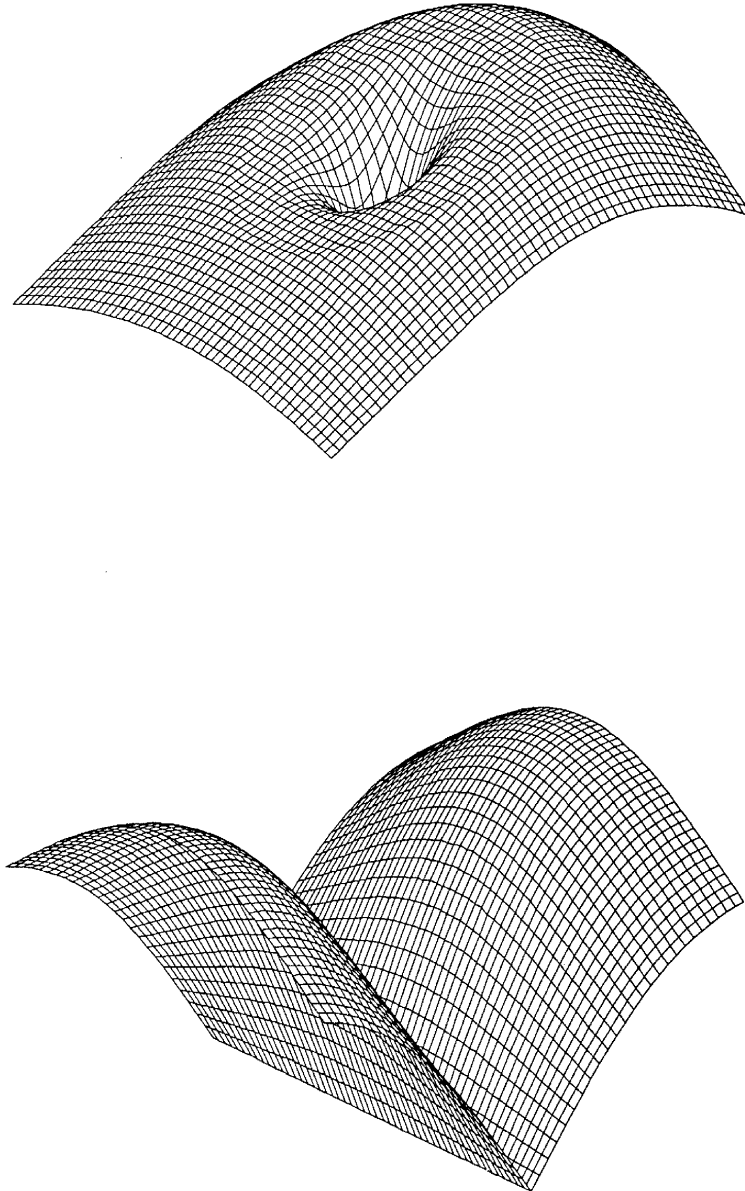


Figura 11.22. Rappresentazione tridimensionale del campo E_y a distanza $r = 2.5\lambda$.
In alto abbiamo il caso asimmetrico, mentre in basso vi è quello simmetrico.

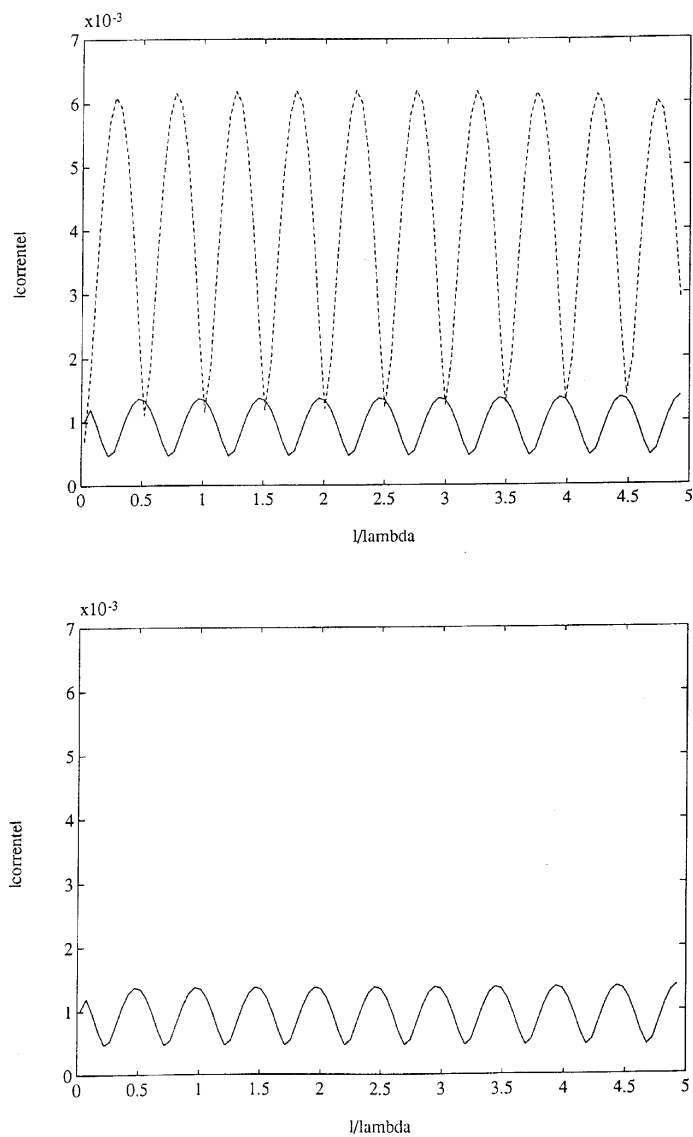


Figura 11.23. Distribuzione della corrente sulla linea di alimentazione. La linea continua rappresenta il modulo di I_1 , mentre quella tratteggiata il modulo di I_2 . In alto è rappresentato il caso asimmetrico, mentre in basso vi è quello simmetrico.

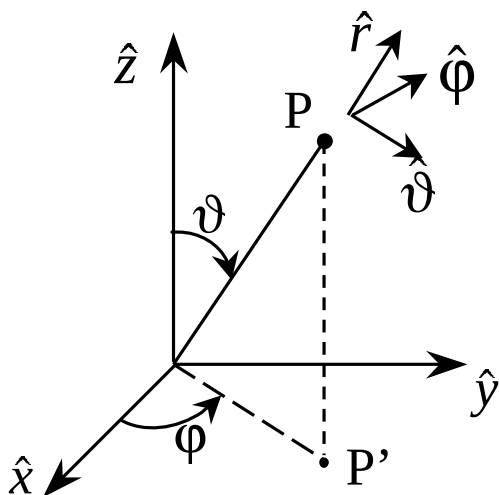
Appendice A

Relazione tra i sistemi di coordinate cartesiano e sferico

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$



$$\hat{x} = \hat{r} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \hat{\varphi} \sin \varphi$$

$$\hat{y} = \hat{r} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \hat{\varphi} \cos \varphi$$

$$\hat{z} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta$$

$$\hat{r} = \hat{x} \sin \theta \cos \varphi + \hat{y} \sin \theta \sin \varphi + \hat{z} \cos \theta$$

$$\hat{\theta} = \hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \sin \varphi - \hat{z} \sin \theta$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

$$\hat{\theta} = \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi}$$

elemento di superficie sulla sfera $\rightarrow d\Sigma = r^2 d\theta d\varphi \sin \theta$

Appendice B

Un'introduzione al calcolo diadico

La necessità di introdurre il *calcolo diadico* nasce dall'esigenza di manipolare equazioni e sistemi di equazioni vettoriali senza rappresentare le grandezze vettoriali in uno specifico sistema di riferimento. Precisiamo che le *diadi* costituiscono a rigore un sottoinsieme delle diadiche, ma preferiamo non fare distinzione e parlare per semplicità solo di diadi.

Supponiamo di avere i vettori $\underline{X}$ e $\underline{Y}$, e indichiamo genericamente con L una trasformazione lineare omogenea fra $\underline{X}$ e $\underline{Y}$. Rappresentiamo i due vettori in due sistemi di riferimento, in generale non coincidenti, adoperando le basi ortonormali $\{\hat{e}_i\}$ e $\{\hat{u}_j\}$. Per fissare le idee, possiamo pensare che $\{\hat{u}_j\} = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ sia la base cartesiana e $\{\hat{e}_j\} = \{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ quella sferica. Abbiamo quindi

$$\underline{X} = \sum_{i=1}^3 X_i \hat{e}_i ; \quad \underline{Y} = \sum_{j=1}^3 Y_j \hat{u}_j \quad (\text{B.1})$$

essendo

$$X_i = \hat{e}_i \cdot \underline{X} ; \quad Y_j = \hat{u}_j \cdot \underline{Y} \quad (\text{B.2})$$

le generiche componenti dei vettori, intesi come terne di numeri complessi. La relazione fra i vettori si può scrivere nel modo seguente:

$$Y_i = \sum_{j=1}^3 L_{ij} X_j \quad (\text{B.3})$$

che fa corrispondere all'operatore lineare L la matrice $[L]$ con elemento generico L_{ij} (si può fare grazie alla linearità dell'operatore). Dunque sostituendo la (B.2) nella (B.1) si ha

$$\underline{Y} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 L_{ij} \hat{u}_i (\hat{e}_j \cdot \underline{X}) \quad (\text{B.4})$$

Ma il vettore $\underline{X}$ non dipende dagli indici della sommatoria doppia, che possiamo scrivere:

$$\underline{Y} = \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 L_{ij} \hat{u}_i \hat{e}_j \right) \cdot \underline{X} \quad (\text{B.5})$$

Il termine (...) nella (B.5) esprime in modo semplice la trasformazione lineare omogenea; in esso compaiono termini costituiti da due vettori accostati $(\hat{u}_i, \hat{e}_j)$ che chiamiamo *diadi*. Si noti

che **non** c'è alcun prodotto vettoriale o scalare tra di essi. Definiamo allora un nuovo oggetto, definito costruttivamente come visto

$$\underline{\underline{L}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 L_{ij} \hat{u}_i \hat{e}_j \quad (\text{B.6})$$

che chiamiamo *diadica*, combinazione lineare di diadi, per cui

$$\underline{Y} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{X} \quad (\text{B.7})$$

si noti che proiettando $\underline{\underline{L}}$ a destra su $\hat{u}_m$, ed a sinistra su $\hat{e}_n$, essendo le basi ortogonali si ottiene

$$L_{mn} = \hat{u}_m \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \hat{e}_n \quad (\text{B.8})$$

Si osservi che nell'espressione di $\underline{\underline{L}}$ compaiono sia gli elementi L_{ij} della trasformazione lineare nella coppia di basi scelte, sia i versori di tali basi, e che la (B.8) ci dice che i coefficienti L_{ij} (ovviamente) dipendono non solo dalla natura della trasformazione lineare L , ma anche dalle basi utilizzate. Pertanto la rappresentazione diadica (B.6) è indipendente dalle coordinate. Per quanto riguarda i termini, le diadiche sono a rigore delle combinazioni lineari di diadi, ma noi spesso confonderemo i due termini, ove ciò non crei delle ambiguità.

Le diadi del tipo $\hat{u}_i \hat{e}_j$, costituite da versori di basi ortogonali sono un caso particolare di diade. Più in generale, una diade è data dall'accostamento tra due vettori qualunque, in generale complessi, ed è caratterizzata in termini di notazione da una doppia sottolineatura. In generale, allora, dati due vettori $\underline{A}$ e $\underline{B}$ possiamo scrivere la diade $\underline{\underline{D}}$ come

$$\underline{\underline{D}} = \underline{A} \underline{B} \quad (\text{B.9})$$

ove il vettore $\underline{A}$ è detto *antecedente* e il vettore $\underline{B}$ *conseguente*. L'ordine in cui appaiono i due vettori è molto importante, e ciò è evidente in tutte le proprietà che considereremo. Si può subito introdurre la *diade trasposta*, che è data, se $\underline{\underline{D}}$ è definita come sopra, da

$$\underline{\underline{D}}^T = \underline{B} \underline{A} \quad (\text{B.10})$$

Ogni diade può essere pensata come la somma di proiettori ognuno dei quali è moltiplicato per un opportuno coefficiente complesso. In questo modo si può ottenere in modo abbastanza semplice la matrice associata alla diade, in quanto il versore antecedente e il versore conseguente determinano la posizione del relativo termine nella matrice indicandone rispettivamente la riga e la colonna. Ad esempio la diade seguente (in cui si è scelta la base cartesiana sia per il vettore antecedente sia per il conseguente):

$$\underline{\underline{D}} = (1 + j)\hat{x}\hat{x} + 2\hat{x}\hat{y} + j\hat{y}\hat{x} + 3j\hat{y}\hat{z} + (2 - j)\hat{z}\hat{x} - \hat{z}\hat{y} + j\hat{z}\hat{z} \quad (\text{B.11})$$

ha matrice associata data da

$$\begin{bmatrix} 1 + j & 2 & 0 \\ j & 0 & 3j \\ 2 - j & -1 & j \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Il *prodotto scalare di una diade per un vettore*, rispettivamente a destra e a sinistra, si definisce nel modo seguente:

$$(\underline{A} \underline{B}) \cdot \underline{C} = (\underline{B} \cdot \underline{C}) \underline{A} \quad (\text{B.13})$$

$$\underline{C} \cdot (\underline{A}\underline{B}) = (\underline{C} \cdot \underline{A})\underline{B} \quad (\text{B.14})$$

Si tratta dunque di un vettore parallelo al vettore antecedente per il prodotto a destra, al conseguente per il prodotto a sinistra.

Una diade del tipo $\underline{\underline{P}}_{ij} = \hat{u}_i \hat{e}_j$, data cioè dall'accostamento di due versori coordinati, prende il nome di *proiettore*, perchè moltiplicando scalarmente tale diade a destra per un vettore si ottiene la proiezione lungo la direzione $\hat{u}_i$ della componente lungo $\hat{e}_j$ di tale vettore. Infatti

$$\underline{\underline{P}}_{ij} \cdot \underline{A} = (\hat{u}_i \hat{e}_j) \cdot \underline{A} = (\hat{e}_j \cdot \underline{A}) \hat{u}_i \quad (\text{B.15})$$

L'elemento generico della matrice che individua il proiettore può essere posto nella forma $P_{ij} = \hat{u}_i \cdot \underline{\underline{P}}_{ij} \cdot \hat{e}_j$. Un esempio di proiettore è la diade $\underline{\underline{P}} = \hat{x}\hat{y}$ e si ha $\underline{\underline{P}} \cdot \underline{A} = (\hat{x}\hat{y}) \cdot \underline{A} = A_y \hat{x}$, essendo $\underline{A}$ un vettore qualunque: si ottiene cioè la proiezione lungo $\hat{x}$ della componente di $\underline{A}$ lungo $\hat{y}$. Particolari proiettori sono quelli di tipo non misto, quali $\hat{x}\hat{x}$, o $\hat{r}\hat{r}$: essi, moltiplicati scalarmente per un vettore, ne cancellano tutte le componenti che non sono lungo $\hat{x}$ o $\hat{r}$.

Il *prodotto esterno di una diade per un vettore*, rispettivamente a destra e a sinistra, si definisce invece nel modo seguente:

$$(\underline{A}\underline{B}) \times \underline{C} = \underline{A} (\underline{B} \times \underline{C}) \quad (\text{B.16})$$

$$\underline{C} \times (\underline{A}\underline{B}) = (\underline{C} \times \underline{A})\underline{B} \quad (\text{B.17})$$

In entrambi i casi si tratta stavolta di diadi, cioè di accostamenti fra vettori.

Una diade molto importante è la *diade identità*, indicata con $\underline{\underline{I}}$ e definita da

$$\underline{\underline{I}} \cdot \underline{V} = \underline{V} \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{V} \quad (\text{B.18})$$

qualunque sia il vettore $\underline{V}$: si tratta dunque dell'elemento neutro rispetto al prodotto scalare fra una diade e un vettore. Se l'elemento generico della matrice che identifica la diade identità è I_{ij} , esso è dato da

$$I_{ij} = \hat{u}_i \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \hat{e}_j \quad (\text{B.19})$$

e quindi se si usa lo stesso sistema di riferimento per i vettori antecedente e conseguente che costituiscono la diade si ha $I_{ij} = \delta_{ij}$, cioè la matrice associata alla diade identità è la matrice identità (ma ciò non vale se i due sistemi di riferimento sono diversi). Questo significa che se si usa il sistema di riferimento cartesiano si ha $\underline{\underline{I}} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$, e se si usa il sistema di riferimento sferico $\underline{\underline{I}} = \hat{r}\hat{r} + \hat{\alpha}\hat{\alpha} + \hat{\beta}\hat{\beta}$: in generale la diade identità, usando uno stesso sistema riferimento, sarà data dalla somma dei proiettori di tipo non misto. Per la diade identità vale poi la seguente proprietà:

$$\underline{V} \times \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}} \times \underline{V} \quad (\text{B.20})$$

che non è per nulla ovvia, se si tiene conto che il prodotto esterno fra vettori non è commutativo.

Importante è anche la *diade identità trasversa* rispetto ad una data direzione. Vediamone due esempi, rispetto alla direzione $\hat{z}$ (riferimento cartesiano) e rispetto alla direzione $\hat{r}$ (riferimento sferico):

$$\underline{\underline{I}}_{t\hat{z}} = \underline{\underline{I}} - \hat{z}\hat{z} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} \quad (\text{B.21})$$

$$\underline{\underline{I}}_{t\hat{r}} = \underline{\underline{I}} - \hat{r}\hat{r} = \hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi} \quad (\text{B.22})$$

L'importanza di questo operatore consiste nel fatto che consente di proiettare su un piano un vettore cui è moltiplicato scalarmente. È facile ad esempio dimostrare che, se $\underline{A}$ è un generico vettore, si ha

$$\underline{I}_{t\hat{z}} \cdot \underline{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} \quad (\text{B.23})$$

cioè si ottiene proprio la proiezione di $\underline{A}$ sul piano (x, y) .

Le due operazioni che si definiscono fra diadi sono la *somma fra diadi* ed il *prodotto fra diadi* $\underline{D}_1 = \underline{AB}$ e $\underline{D}_2 = \underline{CD}$ si definisce nel modo seguente:

$$\underline{D} \cdot \underline{X} = \underline{D}_1 \cdot \underline{X} + \underline{D}_2 \cdot \underline{X} = \underline{A}(\underline{B} \cdot \underline{X}) + \underline{C}(\underline{D} \cdot \underline{X}), \quad \forall \underline{X} \quad (\text{B.24})$$

ed il prodotto (scalare) nel modo seguente:

$$\underline{D}_1 \cdot \underline{D}_2 = \underline{AB} \cdot \underline{CD} = (\underline{B} \cdot \underline{C}) \underline{AD} \quad (\text{B.25})$$

Evidentemente i risultati sono ancora delle diadi. L'elemento neutro della somma fra diadi è la *diade nulla* $\underline{0}$, peraltro non molto adoperata, tale che, $\forall \underline{D}$, si ha

$$\underline{D} = \underline{0} + \underline{D} = \underline{D} + \underline{0} \quad (\text{B.26})$$

Definiamo poi la *diade inversa* $\underline{D}^{-1}$

$$\underline{D}^{-1} \cdot \underline{D} = \underline{D} \cdot \underline{D}^{-1} = \underline{I} \quad (\text{B.27})$$

Per determinare la diade inversa si procede nel seguente modo: si rappresenta la diade che si vuole invertire in forma matriciale utilizzando opportune basi per i vettori antecedente e conseguente, si inverte la matrice e di conseguenza si ottiene la diade inversa adoperando gli stessi sistemi di riferimento usati in precedenza.

Un ultimo risultato, utile nel calcolo della funzione di Green, è la seguente relazione:

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{C}) = (\underline{a} \cdot \underline{C}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{C} \quad (\text{B.28})$$

qualunque siano i vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e qualunque sia la diade $\underline{C}$. Per dimostrarla è sufficiente scrivere la diade come $\underline{C} = \underline{C}_1 \underline{C}_2$ e dunque

$$\begin{aligned} \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{C}) &= \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{C}_1 \underline{C}_2) = [(\underline{a} \cdot \underline{C}_1) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{C}_1] \underline{C}_2 = \\ &= \underline{b} (\underline{a} \cdot \underline{C}_1) \underline{C}_2 - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{C}_1 \underline{C}_2 = \underline{b} (\underline{a} \cdot \underline{C}) - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{C} \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Appendice C

Calcolo di $g_o(z)$ con il metodo dei residui

In questa appendice ci proponiamo di calcolare il seguente integrale con il metodo dei residui:

$$g_o(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \frac{1}{\beta^2 - k^2} e^{-j\beta z} \quad (\text{C.1})$$

La determinazione del cammino di integrazione viene effettuata come caso limite dell'analogo problema in un mezzo con piccole perdite omhiche. In questo caso la costante dielettrica sarà un numero complesso: $\tilde{\epsilon} = \epsilon - j\frac{\gamma}{\omega}$ e quindi di conseguenza anche la costante di propagazione sarà complessa

$$\tilde{k}_\epsilon = \omega \sqrt{\mu_o \tilde{\epsilon}} = \omega \sqrt{\mu_o \epsilon - j\frac{\mu_o \gamma}{\omega}} \quad (\text{C.2})$$

nell'ipotesi di piccole perdite, cioè $\frac{\mu_o \gamma}{\omega} \ll 1$ la parte immaginaria di $\tilde{k}_\epsilon$ è piccola e negativa ottenendo la situazione della Fig. C.1. Per calcolare l'integrale utilizziamo il teorema dei residui

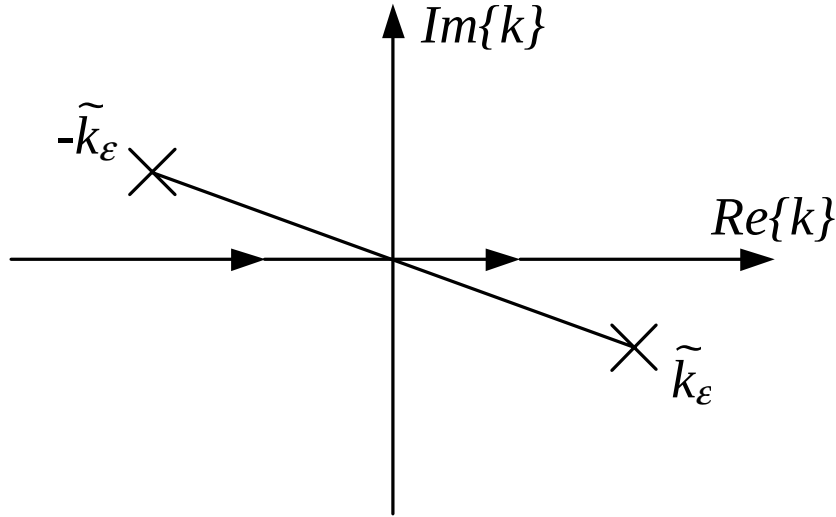


Figura C.1. Effetto piccole perdite

¹. La funzione da integrare ha due poli che nel caso limite di un mezzo senza perdite si trovano sull'asse reale. L'applicazione del metodo prevede l'individuazione di un percorso chiuso su cui integrare. Questo percorso sarà costituito dall'asse reale (escludendo le singolarità) e da una semicirconferenza di centro l'origine e raggio R . Il contributo della semicirconferenza all'integrale è nullo per $R \rightarrow \infty$ ² quindi l'unico contributo sarà quello dell'integrale sull'asse reale. Si può ora procedere al calcolo: poniamo $\beta = \beta' + j\beta''$ e quindi l'esponenziale diventa:

$$e^{-j\beta z} = e^{-j\beta' z} e^{\beta'' z} \quad (C.3)$$

Per far convergere l'integrale deve convergere questo esponenziale ovvero deve convergere il termine $e^{\beta'' z}$. Quindi dovrà essere $\beta'' z < 0$ ovvero $z < 0, \beta'' < 0$ e $z > 0, \beta'' < 0$. Questa situazione condiziona la scelta della semicirconferenza di chiusura che sarà nel semipiano positivo se $\beta'' > 0$ e negativo se $\beta'' < 0$. Consideriamo separatamente i casi $z < 0$ e $z > 0$.

Caso1 $z > 0, \beta'' < 0$. Il percorso di integrazione dovrà chiudersi nel semipiano negativo. Per avere il valore dell'integrale con segno positivo (ovvero per calcolare l'integrale da $-\infty$ a $+\infty$) il verso di percorrenza del cammino dovrà essere orario come in Fig. C.2. Il cammino di

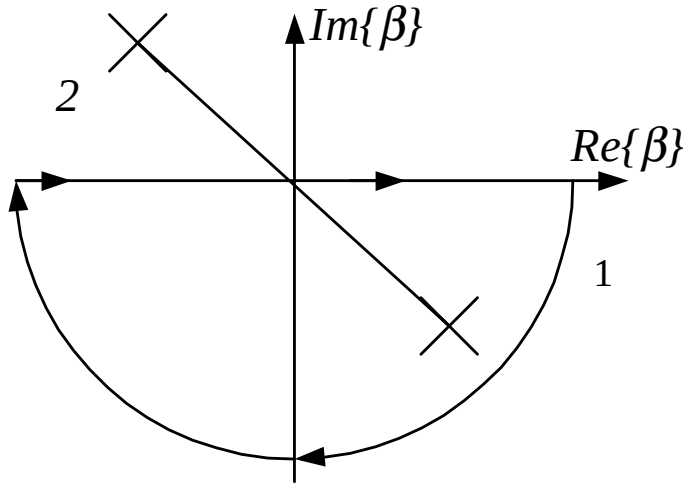


Figura C.2. Definizione del percorso di integrazione in presenza di piccole perdite

integrazione nel caso senza perdite sarà il caso limite di quello con perdite. Al limite per $\gamma \rightarrow 0$ i poli si adageranno sull'asse reale. Il cammino di integrazione però dovrà ancora contenere il polo 1 ed escludere il polo 2 come in Fig. C.3. Si ricorda che nel calcolo dei residui il verso di percorrenza del cammino di integrazione è preso positivo in verso antiorario. Nel nostro caso il polo 1 è compreso all'interno di un cammino percorso in senso orario, quindi nel calcolo del residuo il fattore moltiplicativo dovrà essere $-2\pi j$

$$\begin{aligned} \int_{C^+} d\beta \frac{1}{\beta^2 - k^2} e^{-j\beta z} &= -2\pi j \operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{\beta^2 - k^2} e^{-j\beta z}; \beta = +k \right\} = \\ &= -2\pi j \lim_{\beta \rightarrow +k} \frac{1}{(\beta + k)(\beta - k)} e^{-j\beta z} (\beta - k) = \\ &= -2\pi j \frac{e^{-jkz}}{2k} \end{aligned} \quad (C.4)$$

¹vedi Giancarlo Teppati – *Lezioni di Analisi Matematica III* edizione Levrotto e Bella 1995 par. III.5.2

²vedi Giancarlo Teppati – *Lezioni di Analisi Matematica III* edizione Levrotto e Bella 1995 par. V.2.2.1 V.3.1 V.3.2

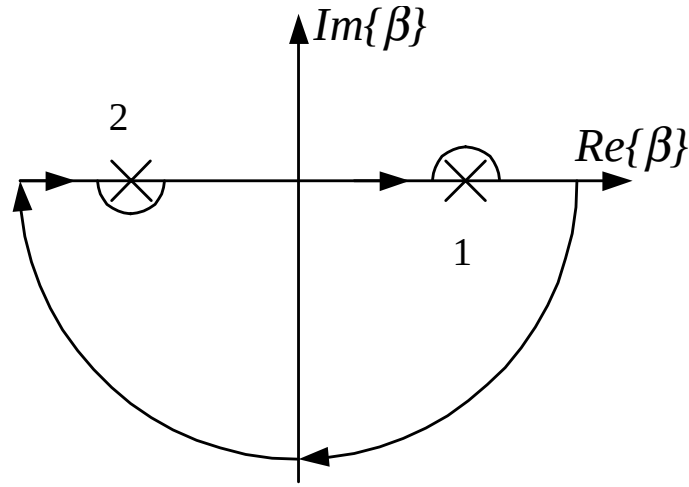


Figura C.3. Definizione del percorso di integrazione

e quindi

$$g_o(z) = -j \frac{e^{+jkz}}{2k} \quad (C.5)$$

Caso 2: $z < 0$, $\beta'' > 0$ Nel caso in cui $z > 0$, la situazione è simmetrica alla precedente: la chiusura del cammino di integrazione avverrà nel semipiano positivo come in Fig. C.4 Questa

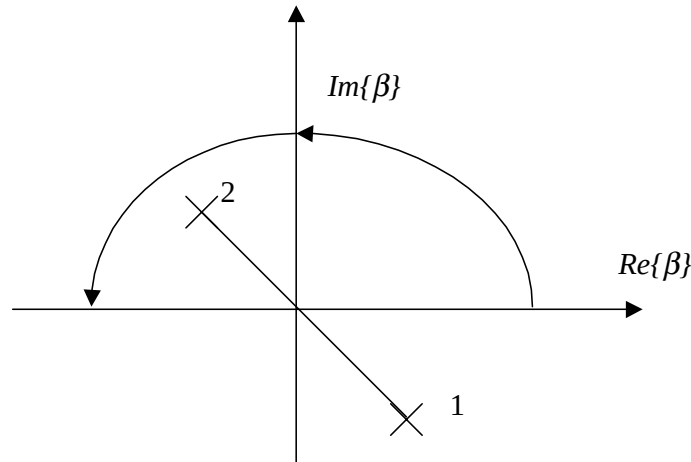


Figura C.4. Definizione del percorso di integrazione nel caso di piccole perdite

volta sarà il polo 2 ad essere compreso nel percorso di integrazione. Facendo nuovamente il limite per $\gamma \rightarrow 0$ ottengo la situazione della Fig. C.5 Il contorno avvolge il polo 2 in verso orario questa volta, quindi il fattore moltiplicativo del residuo sarà $2\pi j$

$$\begin{aligned} \int_{C^+} d\beta \frac{1}{\beta^2 - k^2} e^{-j\beta z} &= +2\pi j \operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{\beta^2 - k^2} e^{-j\beta z}; \beta = -k \right\} = \\ &= +2\pi j \lim_{\beta \rightarrow -k} \frac{1}{(\beta + k)(\beta - k)} e^{-j\beta z} (\beta + k) = \\ &= -2\pi j \frac{e^{+jkz}}{2k} \end{aligned} \quad (C.6)$$

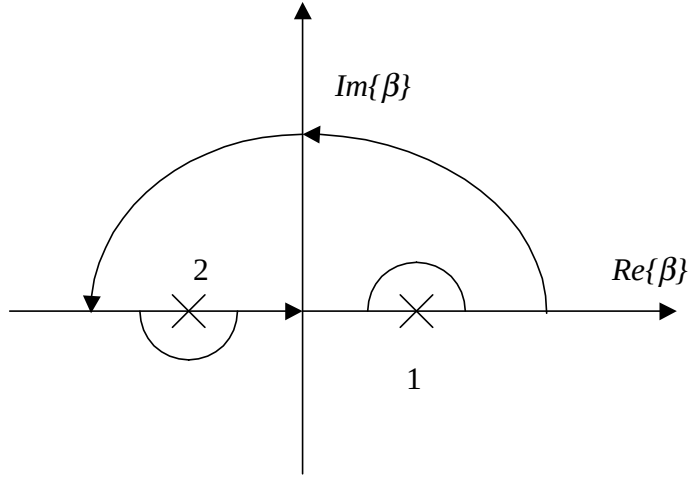


Figura C.5. Definizione del percorso di integrazione nel caso senza perdite

e quindi

$$g_o(z) = -j \frac{e^{+jkz}}{2k} \quad (C.7)$$

È quindi evidente che il risultato ottenuto nei due casi può essere scritto nella forma compatta

$$g_o(z) = \frac{e^{-jk|z|}}{2jk} \quad (C.8)$$

Nota: il calcolo dell'integrale appena effettuato non deve essere confuso con quello di un valore principale che è definito come:

$$v.p. \int dz f(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(z) dz + \int_{c+\epsilon}^b f(z) dz$$

dove c è il polo. Nel caso del calcolo di un valore principale tutti i poli sull'asse reale danno un contributo pari a $\pi j \text{Res}(\text{polo})$, dove $\text{Res}(\text{polo})$ indica il residuo della funzione calcolato nel polo. Nel nostro caso invece si ha l'inclusione di un polo e l'esclusione di un altro poichè non si tratta di un valore principale. In tal caso i poli contenuti all'interno del ciclo contribuiranno secondo il fattore $2\pi j \text{Res}(\text{polo})$ al valore dell'integrale e quelli all'esterno saranno ininfluenti.

Appendice D

Calcolo della funzione di Green scalare

Calcoliamo il seguente integrale

$$\Psi(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} d^3 \underline{k} \tilde{\Psi}(k) e^{-j \underline{k} \cdot \underline{r}} \quad (D.1)$$

Il calcolo va fatto in coordinate sferiche, in cui $d^3 \underline{k} = k^2 dk d\alpha \sin \alpha d\beta$, dunque

$$\begin{aligned} \Psi(\underline{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\pi d\alpha \int_0^{+\infty} dk k^2 \tilde{\Psi}(k) \sin \alpha e^{-j k r \hat{k} \cdot \hat{r}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^{+\infty} dk k^2 \tilde{\Psi}(k) \int_0^\pi d\alpha e^{-j k r \cos \alpha} \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{j r (2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dk k \tilde{\Psi}(k) \int_0^\pi d\alpha j k r e^{-j k r \cos \alpha} \sin \alpha = \\ &= -\frac{j}{4\pi^2 r} \int_0^{+\infty} dk k \tilde{\Psi}(k) (e^{+j k r} - e^{-j k r}) \end{aligned} \quad (D.2)$$

perché $\hat{k} \cdot \hat{r} = \cos \alpha$ e

$$\int_0^\pi d\alpha j k r e^{-j k r \cos \alpha} \sin \alpha = \left[e^{-j k r \cos \alpha} \right]_0^\pi = e^{+j k r} - e^{-j k r} \quad (D.3)$$

Dunque l'integrale si spezza in due contributi

$$\begin{aligned} \Psi(\underline{r}) &= \frac{j}{4\pi^2 r} \left[\int_0^{+\infty} dk \frac{k}{k^2 - \omega^2 \epsilon \mu} e^{-j k r} - \int_0^{+\infty} dk \frac{k}{k^2 - \omega^2 \epsilon \mu} e^{+j k r} \right] = \\ &= \frac{j}{4\pi^2 r} \left[\int_0^{+\infty} dk \frac{k}{k^2 - \omega^2 \epsilon \mu} e^{-j k r} - \int_{-\infty}^0 dk \frac{k}{k^2 - \omega^2 \epsilon \mu} e^{-j k r} \right] = \\ &= \frac{j}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{k}{k^2 - \omega^2 \epsilon \mu} e^{-j k r} \end{aligned} \quad (D.4)$$

avendo sostituito a $\tilde{\Psi}(k)$ la sua espressione. L'integrale che è rimasto si può calcolare utilizzando il teorema dei residui e la deformazione del contorno, vedendo k come una variabile complessa.

Sull'asse reale abbiamo due punti singolari dovuti ai poli $k = \pm k_0$ della funzione integranda, dove $k_0^2 \equiv \omega^2 \epsilon \mu$. Si hanno tre possibili scelte per il cammino d'integrazione che illustriamo nella Fig. D.1. Il caso a) si riferisce al calcolo del valore principale mentre le possibilità b) e c) sono l'una la duale dell'altra.

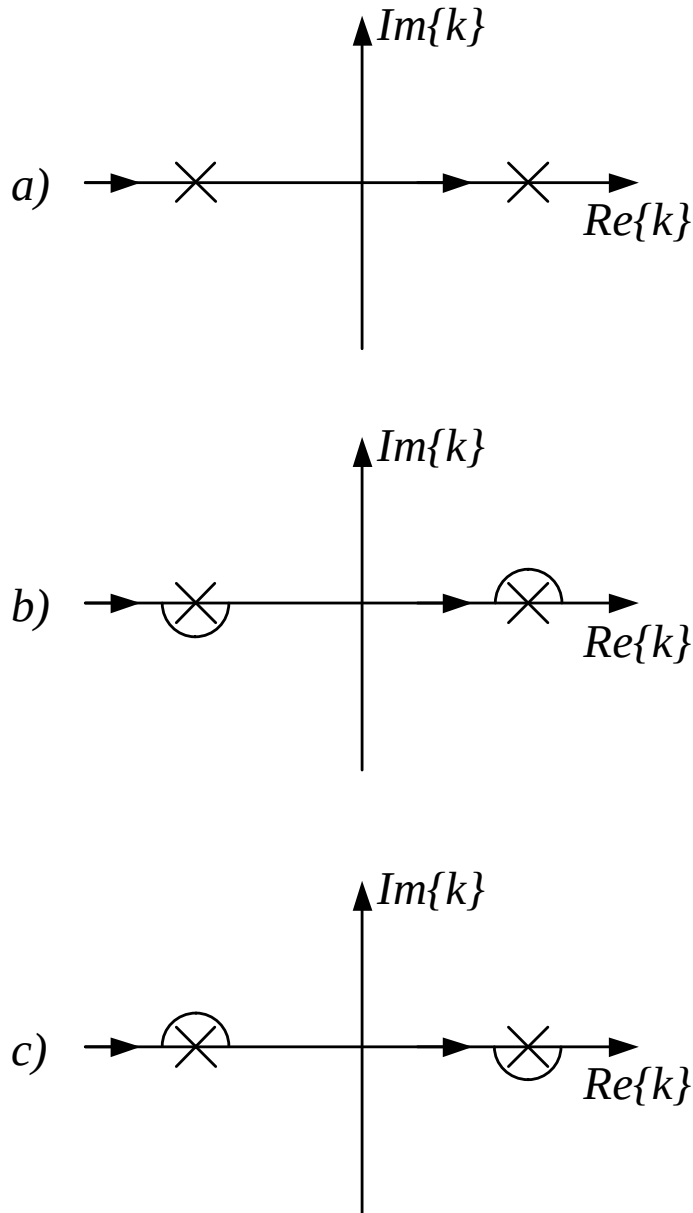


Figura D.1. Definizione del percorso di integrazione

Dal momento che siamo interessati al caso $r > 0$ e la funzione integranda contiene il termine e^{-jkr} la chiusura del cammino di integrazione va fatta nel semipiano $Im(k) < 0$. Il calcolo del residuo va fatto secondo lo schema b); essendo orario il senso di percorrenza del cammino chiuso (vedi Fig. D.2) il fattore moltiplicativo per la formula del residuo è $-2\pi j$.

Possiamo notare che l'unico contributo è dato dal polo in $k = k_0$; chiamiamo $f(k)$ la funzione

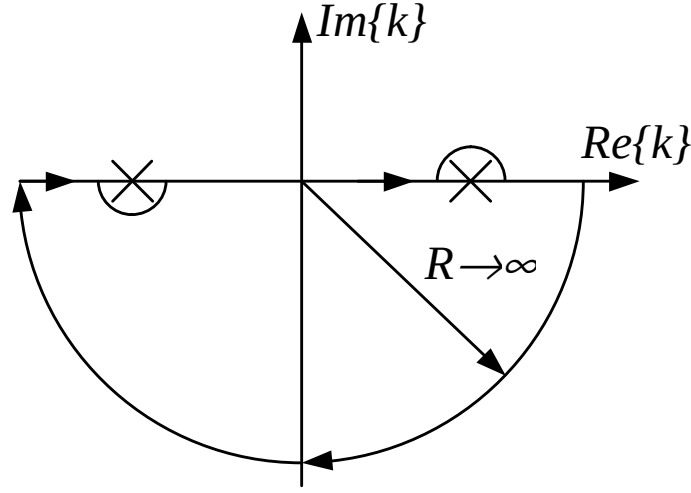


Figura D.2. Applicazione del teorema dei residui

integrandi dell'Eq. (D.4)

$$f(k) = \frac{k}{k^2 - k_0^2} e^{-jkr} \quad (D.5)$$

si ha dunque

$$\text{Res} \{ f(k)(k - k_0); k = k_0 \} \quad (D.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk f(k) = -2\pi j \left[\frac{k}{k^2 - k_0^2} e^{-jkr} (k - k_0) \right]_{k=k_0} \quad (D.7)$$

Pertanto

$$\Psi(\underline{r}) = \frac{j}{4\pi^2 r} (-2\pi j) \left[\frac{k_0}{2k_0} e^{-jk_0 r} \right] \quad (D.8)$$

$$\Psi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \quad (D.9)$$

Si può osservare che la scelta indicata con c) nella Fig. D.1 porta al risultato

$$\Psi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi r} e^{jk_0 r} \quad (D.10)$$

Sommando la (D.9) e la (D.10) si ottiene il doppio del valore principale che corrisponde al caso a). Prediamo come risultato utile la (D.9). La giustificazione di questa scelta la si trova riformulando il problema, consideriamo un mezzo con piccole perdite ohmiche e quindi una costante dielettrica complessa $\tilde{\epsilon} = \epsilon - j\frac{\gamma}{\omega}$ e quindi una costante di propagazione anch'essa complessa

$$\tilde{k}_\epsilon = \omega \sqrt{\mu_o \tilde{\epsilon}} = \omega \sqrt{\mu_o \epsilon - j \frac{\mu_o \gamma}{\omega}} \quad (D.11)$$

$$\tilde{k}_\epsilon = \omega \sqrt{\mu_o \epsilon \left[1 - j \frac{\mu_o \gamma}{\omega \epsilon} \right]} \quad (D.12)$$

Nell'ipotesi di piccole perdite cioè con $\frac{\gamma}{\omega \epsilon} \ll 1$ la parte immaginaria della (D.12) è piccola e sicuramente negativa. Possiamo quindi ridisegnare la posizione dei poli (vedi Fig. D.3

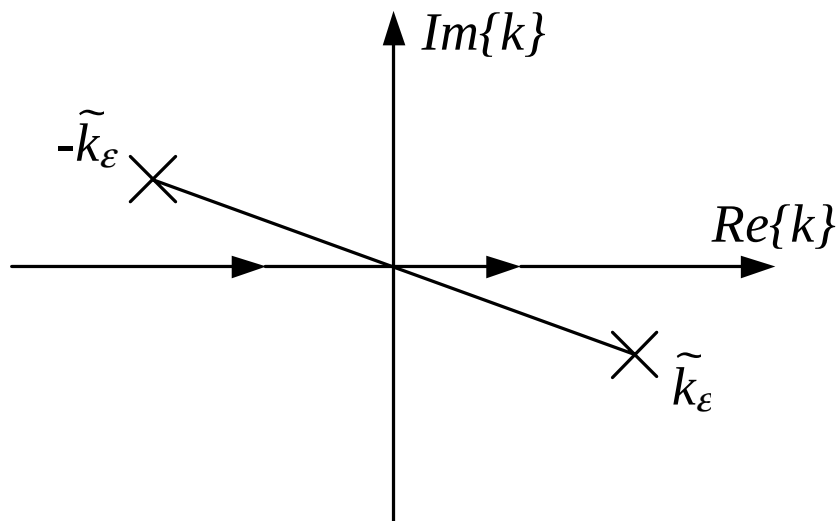


Figura D.3. Effetto piccole perdite

Pertanto il cammino di integrazione passa al di sopra del polo posto a sinistra ($\text{Re}\{f\} < 0$). Se le perdite tendono ad annullarsi riotteniamo la situazione b) illustrata in precedenza.

Appendice E

Forma esplicita della funzione diadica di Green

E.1 Valutazione della funzione di Green tramite espressioni integro-differenziali

Ci proponiamo di calcolare la forma esplicita della funzione diadica di Green tramite espressioni integro-differenziali. Il vantaggio che si ha rispetto all'utilizzo della strategia utilizzata nella seconda parte dell'appendice è costituito dall'assenza dell'operatore $\nabla\nabla$. Infatti la strategia utilizzata mira ad isolare il termine di sorgente dal resto dei termini per ottenere la diade desiderata in modo diretto. Nel paragrafo 2.4 si è giunti alla scrittura del campo come somma di un termine irrotazionale ($-\nabla\Phi(\underline{r})$ nella 2.121) ed uno presente solo a frequenza non nulla ($-j\omega\mathcal{A}(\underline{r})$ nella 2.121); nel seguito per evitare confusione con gli angoli sferici indicheremo con U il potenziale elettrico che era stato indicato come Φ , scrivendo quindi:

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega\mathcal{A}(\underline{r}) - \nabla U(\underline{r}) \quad (\text{E.1})$$

dove

$$U(\underline{r}) \equiv \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{r}' \Psi(\underline{r} - \underline{r}') q(\underline{r}') \quad , \quad q = \nabla \cdot \underline{J}_e \quad (\text{E.2})$$

e

$$\mathcal{A}(\underline{r}) \equiv \mu \int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{r}' \Psi(\underline{r} - \underline{r}') \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (\text{E.3})$$

In un generico sistema di coordinate ortogonali ξ_1, ξ_2, ξ_3 , il gradiente ∇ ha la seguente espressione:

$$\nabla = \sum_{i=1}^3 \hat{u}_i(\underline{r}) \frac{1}{h_i(\underline{r})} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (\text{E.4})$$

dove gli $\hat{u}_i$ sono i versori delle coordinate, e gli h_i sono detti *coefficienti metrici*. Data la simmetria sferica del problema (sorgente puntiforme, spazio omogeneo) è conveniente utilizzare il sistema sferico per la valutazione delle quantità di interesse, nel nostro caso si ha quindi

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (r, \theta, \phi)$$

$$(h_1, h_2, h_3) = (1, r, r \sin \theta)$$

$$(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3) = (\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$$

si noti che in un sistema di riferimento sferico i versori non sono indipendenti dal punto considerato e quindi devono essere derivati anch'essi (questo non avviene invece in un sistema di riferimento cartesiano). Cerchiamo ora di riscrivere in una forma più conveniente il termine $-\nabla U(\underline{r})$. Come descritto nel paragrafo 2.4 passiamo alla formulazione della (E.1) nel dominio della frequenza

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\epsilon}(-j\underline{k})\tilde{U}(k) &= -\frac{1}{\epsilon}(-j\underline{k})\tilde{\Psi}(k)\tilde{q}(\underline{k}) = \\ &= -j\omega\mu\frac{1}{\omega^2\epsilon\mu}(-j\underline{k})(-j\underline{k})\cdot\tilde{\underline{J}}_e(\underline{k})\tilde{\Psi}(k) = -\frac{1}{j\omega\epsilon}(-j\underline{k})(-j\underline{k})\tilde{\Psi}(\underline{k})\cdot\tilde{\underline{J}}_e(\underline{k}) \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Tornando quindi nel dominio dello spazio riscriviamo la (E.5) come

$$\underline{E}_q(\underline{r}) = -\nabla U(\underline{r}) \quad (\text{E.6})$$

dove

$$U(\underline{r}) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{r}' \nabla \Psi(\underline{r} - \underline{r}') \cdot \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (\text{E.7})$$

Procediamo ora all'esplicitazione dei calcoli iniziando dalla (E.7). Calcoliamo $\nabla \Psi$ utilizzando la (E.4), che in coordinate sferiche si semplifica in

$$\nabla \Psi(r) = \hat{r} \frac{d\Psi}{dr} = \hat{r} \dot{\Psi}(\underline{r}) \quad (\text{E.8})$$

otteniamo quindi

$$\underline{U}(\underline{r}) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{r}' \dot{\Psi}(\underline{r}) \hat{r}' \cdot \underline{J}_e(\underline{r} - \underline{r}') \quad (\text{E.9})$$

È importante notare il carattere convoluzionale della (E.9) (dovuto all'omogeneità dello spazio) e il fatto che l'integrale è esteso a tutto lo spazio (anche se l'integrale è non nullo solo dove lo è $\underline{J}_e$). Possiamo allora operare un cambio di variabile e, indicando con $\underline{R} = \underline{r} - \underline{r}'$ e $\hat{R} = \underline{R} / R$ otteniamo:

$$\underline{U}(\underline{r}) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{r}' \dot{\Psi}(\underline{r} - \underline{r}') \hat{R}(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (\text{E.10})$$

(si noti che R era indicato nel paragrafo 2.5 come d). Esplicitando ulteriormente i calcoli il campo irrotazionale della (E.6) si esprime ora come

$$\underline{E}_q(\underline{r}) = \sum_{i=1}^3 \hat{u}_i \frac{1}{h_i(\underline{r})} \frac{\partial}{\partial \xi_i} U(\underline{r}) = \sum_{i=1}^3 \hat{u}_i(\underline{r}) \frac{1}{h_i(\underline{r})} \int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{r}' \frac{\partial}{\partial \xi_i} [\dot{\Psi}(\underline{r} - \underline{r}') \hat{R}(\underline{r}, \underline{r}')] \cdot \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (\text{E.11})$$

Questo è possibile poichè l'operatore ∇ è ora applicato alla variabile $\underline{r}$ per cui può essere portato dentro l'integrale. Nella formula (E.11) possiamo notare come il termine $\underline{J}_e(\underline{r}')$ all'interno dell'integrale moltiplica un'altro termine di natura diadica. Indicando questa diade con $\underline{D}$ possiamo ricavare la (E.6) come integrale di convoluzione tra un termine di natura diadica e il termine di sorgente:

$$\underline{E}_q(\underline{r}) = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{\mathbf{R}^3} d^3\underline{r}' \underline{D}(\underline{r} - \underline{r}') \cdot \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (\text{E.12})$$

Procediamo ora al calcolo del termine diadico. Chiamiamo $\hat{R} \hat{\Theta} \hat{\Phi}$ i versori di un sistema di coordinate sferico centrato in $\underline{R} = 0$ (cioè in $\underline{r} = \underline{r}'$); calcoliamo i singoli termini della (E.11)

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{d\Psi}{dR} \hat{R} \right] = \left[\frac{\partial \hat{R}}{\partial R} \frac{d\Psi}{dR} + \hat{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{d\Psi}{dR} \right) \right] \quad (\text{E.13})$$

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} \left[\frac{d\Psi}{dR} \hat{R} \right] = \left[\frac{\partial \hat{R}}{\partial \Theta} \frac{d\Psi}{dR} + \hat{R} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{d\Psi}{dR} \right) \right] \quad (\text{E.14})$$

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\frac{d\Psi}{dR} \hat{R} \right] = \left[\frac{\partial \hat{R}}{\partial \Phi} \frac{d\Psi}{dR} + \hat{R} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{d\Psi}{dR} \right) \right] \quad (\text{E.15})$$

Per svolgere questi calcoli ci spostiamo in coordinate cartesiane relative comunque al riferimento che stiamo considerando. Avremo quindi:

$$\hat{R} = (\hat{X} \cos \Phi + \hat{Y} \sin \Phi) \sin \Theta + \hat{Z} \cos \Theta \quad (\text{E.16})$$

Calcolando quindi le derivate parziali e ricordando le relazioni che intercorrono tra i versori del sistema di coordinate sferico otteniamo (vedi appendice A):

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial R} = 0 \quad (\text{E.17})$$

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial \Theta} = \hat{\Theta} \quad (\text{E.18})$$

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial \Phi} = \hat{\Phi} \sin \Theta \quad (\text{E.19})$$

per completare il calcolo della (E.11) dobbiamo ora calcolare $\frac{d\Psi}{dR} = \dot{\Psi}(\underline{R})$

$$\dot{\Psi} = \frac{d\Psi}{dR} = \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{4\pi R} e^{-jk_0 R} \right) = \frac{1}{4\pi R} e^{-jk_0 R} \left(-jk_0 - \frac{1}{R} \right) = \Psi(R) \left(-jk_0 - \frac{1}{R} \right) \quad (\text{E.20})$$

A questo punto possiamo calcolare le derivate parziali di $\dot{\Psi}$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{d\Psi}{dR} \right) = \Psi(R) \left(-jk_0 - \frac{1}{R} \right) \left(-jk_0 - \frac{1}{R} \right) + \Psi(R) \frac{1}{R^2} = \left(-k_0^2 + \frac{2}{R^2} + \frac{j2k_0}{R} \right) \Psi(R) \quad (\text{E.21})$$

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{d\Psi}{dR} \right) = 0 \quad (\text{E.22})$$

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{d\Psi}{dR} \right) = 0 \quad (\text{E.23})$$

Sostituendo (E.17) (E.18) (E.19) (E.20) (E.21) (E.22) in (E.11) avremo quindi come risultato finale

$$\underline{E}_q(\underline{r}) = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{R^3} d^3 \underline{r}' \left[\hat{R} \hat{R} \left(j \frac{2k_0}{R} + \frac{2}{R} - k_0^2 \right) + (\hat{\Theta} \hat{\Theta} + \hat{\Phi} \hat{\Phi}) \frac{1}{R} \left(-jk_0 - \frac{1}{R} \right) \right] \Psi(R) \cdot \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (\text{E.24})$$

confrontando questa espressione con la (E.12) possiamo subito identificare il termine diadico $\underline{\underline{D}}(\underline{R})$

$$\underline{\underline{D}}(\underline{R}) = \left[\hat{R} \hat{R} \left(j \frac{2k_0}{R} + \frac{2}{R} - k_0^2 \right) + (\hat{\Theta} \hat{\Theta} + \hat{\Phi} \hat{\Phi}) \frac{1}{R} \left(-jk_0 - \frac{1}{R} \right) \right] \Psi(R) \quad (\text{E.25})$$

Per trovare l'espressione del campo totale dobbiamo aggiungere il termine $-j\omega \underline{A}(\underline{r})$ della (E.1). Data la forma in (E.3) e notando che $\underline{J}_e = \underline{I} \cdot \underline{J}_e$ è quindi sufficiente aggiungere alla diade $\underline{\underline{D}}(\underline{r})/k_0^2$ la diade $\underline{I} \Psi(r)$ ottenendo come risultato

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega\mu \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \underline{I} \cdot \Psi(\underline{r} - \underline{r}') \underline{J}_e(\underline{r}') - \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \underline{r}' \underline{\underline{D}}(\underline{r} - \underline{r}') \underline{J}_e(\underline{r}') = \quad (\text{E.26})$$

$$= -j\omega\mu \int_{\mathbf{R}^3} d^3 (\underline{I} \Psi(\underline{r} - \underline{r}') + \frac{\underline{\underline{D}}(\underline{r} - \underline{r}')}{k_0^2}) \cdot \underline{J}_e(\underline{r}') \quad (\text{E.27})$$

Ricordando la scrittura del campo elettrico data nel paragrafo 2.4 ci rendiamo conto che la diade $\underline{I} \Psi(\underline{r} - \underline{r}') + \underline{\underline{D}}/k_0^2$ è appunto la forma esplicita della funzione diadica di Green che ci eravamo proposti di trovare. Possiamo quindi scrivere l'espressione finale della funzione diadica di Green

$$\underline{\underline{G}}(\underline{r}) = \hat{r} \hat{r} \left[2 \left(\frac{j}{k_0 r} + \frac{1}{(k_0 r)^2} \right) \right] \Psi(r) + (\hat{\theta} \hat{\theta} + \hat{\phi} \hat{\phi}) \left[1 - \frac{j}{k_0 r} - \frac{1}{(k_0 r)^2} \right] \Psi(r) \quad (\text{E.28})$$

E.2 Valutazione mediante calcolo diretto (differenziale)

Lo scopo di questa appendice è di ricavare le espressioni delle due diadi $\underline{\underline{G}}(\underline{r})$ e $\underline{\underline{G}}'(\underline{r})$, che giocano un ruolo fondamentale nel calcolo completo della funzione di Green. Partiamo da

$$\underline{\underline{G}}(\underline{r}) = \left(\underline{I} + \frac{\nabla \nabla}{\omega^2 \epsilon \mu} \right) \Psi(r) = \left(\underline{I} + \frac{\nabla \nabla}{k_0^2} \right) \Psi(r) \quad (\text{E.29})$$

Poniamo $\underline{g} = \nabla \Psi(r)$ e quindi $\underline{a} = \nabla \nabla \Psi(r) = \nabla \underline{g}$. Conviene lavorare nel sistema di riferimento sferico, perchè Ψ dipende solo da r . Allora otteniamo

$$\underline{g} = \nabla \Psi(r) = \hat{r} \frac{d\Psi}{dr} \quad (\text{E.30})$$

perchè $\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_i} = 0$ per $i = 2, 3$. Inoltre

$$\nabla \underline{g} = \sum_{i=1}^3 \hat{u}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\hat{r} \frac{d\Psi}{dr} \right) \quad (\text{E.31})$$

con

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\hat{r} \frac{d\Psi}{dr} \right) = \hat{r} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{d\Psi}{dr} \right) + \frac{d\Psi}{dr} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \hat{r} \quad (\text{E.32})$$

Esplicitando la E.31 otteniamo

$$\nabla \underline{g} = \hat{r} \left[\frac{\partial \hat{r}}{\partial r} \frac{d\Psi}{dr} + \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{d\Psi}{dr} \right) \right] + \hat{\theta} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} \frac{d\Psi}{dr} + \hat{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{d\Psi}{dr} \right) \right] + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} \frac{d\Psi}{dr} + \hat{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{d\Psi}{dr} \right) \right] \quad (\text{E.33})$$

Si passa a questo punto in coordinate cartesiane, cioè

$$\hat{r} = (\hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi) \sin \theta + \hat{z} \cos \theta \quad (\text{E.34})$$

Le derivazioni parziali $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ si effettuano nel sistema cartesiano, in cui i versori coordinati non dipendono dalla posizione nello spazio. Sostituendo ad $\hat{r}$ la E.34 otteniamo

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = 0 \quad (\text{E.35})$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{x} \cos \phi \cos \theta + \hat{y} \sin \phi \cos \theta - \hat{z} \sin \theta \quad (\text{E.36})$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = (-\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi) \sin \theta \quad (\text{E.37})$$

e, ricordando che

$$\hat{\theta} = \hat{x} \cos \phi \cos \theta + \hat{y} \sin \phi \cos \theta - \hat{z} \sin \theta \quad (\text{E.38})$$

$$\hat{\phi} = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi \quad (\text{E.39})$$

possiamo riscrivere le E.35, E.36, E.37 nel sistema sferico

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = 0 \quad (\text{E.40})$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta} \quad (\text{E.41})$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \hat{\phi} \sin \theta \quad (\text{E.42})$$

calcoliamo ora i singoli termine della E.33

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \right) = \frac{1}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \left(-jk_0 - \frac{1}{r} \right) = \Psi(r) \left(-jk_0 - \frac{1}{r} \right) \quad (\text{E.43})$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{d\Psi}{dr} \right) = \Psi(r) \left(-jk_0 - \frac{1}{r} \right) \left(-jk_0 - \frac{1}{r} \right) + \Psi(r) \frac{1}{r} = \left(-k_0^2 + \frac{2}{r^2} + \frac{j2k_0}{r} \right) \Psi(r) \quad (\text{E.44})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{d\Psi}{dr} \right) = 0 \quad (\text{E.45})$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{d\Psi}{dr} \right) = 0 \quad (\text{E.46})$$

Sostituendo le E.40, E.41, E.42, E.43, E.44, E.45 e E.46 nella E.33 otteniamo

$$\nabla \underline{g} = \nabla \nabla \Psi(r) = \left[\hat{r} \hat{r} \left(j \frac{2k_0}{r} + \frac{2}{r^2} - k_0^2 \right) + (\hat{\theta} \hat{\theta} + \hat{\phi} \hat{\phi}) \frac{1}{r} \left(-jk_0 - \frac{1}{r} \right) \right] \Psi(r) \quad (\text{E.47})$$

Ciò che si ottiene alla fine sostituendo la E.47 nella E.29 è il risultato seguente:

$$\underline{\underline{G}}(\underline{r}) = \left[(\hat{r}\hat{r} + \hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}) + \hat{r}\hat{r} \left(j\frac{2k_0}{r} + \frac{2}{r^2} - k_0^2 \right) \frac{1}{k_0^2} + (\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}) \frac{1}{k_0^2 r} \left(-jk_0 - \frac{1}{r} \right) \right] \Psi(r) \quad (\text{E.48})$$

ovvero

$$\underline{\underline{G}}(\underline{r}) = \hat{r}\hat{r} \left[2 \left(\frac{j}{k_0 r} + \frac{1}{(k_0 r)^2} \right) \right] \Psi(r) + (\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}) \left[1 - \frac{j}{k_0 r} - \frac{1}{(k_0 r)^2} \right] \Psi(r) \quad (\text{E.49})$$

che possiamo scrivere come

$$\underline{\underline{G}}(\underline{r}) = \left[A(k_0 r) \hat{r}\hat{r} + B(k_0 r) (\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}) \right] \Psi(r) \quad (\text{E.50})$$

ove

$$A(k_0 r) = 2 \left(\frac{j}{k_0 r} - \frac{1}{(k_0 r)^2} \right) ; B(k_0 r) = 1 - \frac{A(k_0 r)}{2} \quad (\text{E.51})$$

Passiamo adesso a $\underline{\underline{G}}'(\underline{r})$.

$$\underline{\underline{G}}'(\underline{r}) = \nabla \times \underline{\underline{G}}(\underline{r}) = \nabla \Psi(r) \times \underline{\underline{I}} \quad (\text{E.52})$$

ove

$$\nabla \Psi(r) = \hat{r} \frac{d\Psi}{dr} = \hat{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \right) = \frac{1}{4\pi} f(r) \hat{r} \quad (\text{E.53})$$

e $f(r) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} e^{-jk_0 r} \right)$. Svolgendo i calcoli

$$f(r) = -\frac{1}{r^2} e^{-jk_0 r} + \frac{1}{r} (-jk_0) e^{-jk_0 r} = -\frac{e^{-jk_0 r}}{r} \left(\frac{1}{r} + jk_0 \right) \quad (\text{E.54})$$

Abbiamo dunque

$$\nabla \Psi(r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \left(\frac{1}{r} + jk_0 \right) \hat{r} = jk_0 \hat{r} \left(\frac{j}{k_0 r} - 1 \right) \Psi(r) \quad (\text{E.55})$$

Se poniamo $C(k_0 r) = 1 - \frac{j}{k_0 r}$ otteniamo $\underline{\underline{G}}'(\underline{r}) = -jk_0 \hat{r} \times \underline{\underline{I}} C(k_0 r) \Psi(r)$. Ma se esprimiamo la diade identità in coordinate sferiche abbiamo $\underline{\underline{I}} = \hat{r}\hat{r} + \hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}$, e allora

$$\hat{r} \times \underline{\underline{I}} = \hat{r} \times (\hat{r}\hat{r} + \hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}) = (\hat{r} \times \hat{\theta}) \hat{\theta} + (\hat{r} \times \hat{\phi}) \hat{\phi} = \hat{\phi}\hat{\theta} - \hat{\theta}\hat{\phi} \quad (\text{E.56})$$

Otteniamo infine

$$\underline{\underline{G}}'(\underline{r}) = -jk_0 C(k_0 r) \Psi(r) (\hat{\phi}\hat{\theta} - \hat{\theta}\hat{\phi}) \quad (\text{E.57})$$

Appendice F

Potenza di segnali stazionari in senso lato

Ricordiamo brevemente che un segnale (V) è stazionario in senso lato (*wide sense stationarity*, WSS) se sono verificate due condizioni:

- *media* costante:

$$E\{V\} = \mu_V$$

- *autocorrelazione* invariante per traslazioni temporali:

$$R(t, t + \tau) = R(\tau) \equiv E\{V^2(\tau)\}$$

Consideriamo ora la somma ($V = V_1 + V_2$) di due processi casuali WSS (V_1 e V_2). Nel nostro caso V_1 e V_2 sono le tensioni dei generatori equivalenti in RX (V_{a1} e V_{a2}) dovute a due sorgenti di onde piane incoerenti, pertanto sono segnali scorrelati e quindi si ha:

$$E\{V_1 V_2\} = E\{V_1\} E\{V_2\}$$

Inoltre le sorgenti che emettono campi elettromagnetici, non possono irradiare la componente continua ($\omega = 0$), per cui i segnali V_1 e V_2 saranno anche a media nulla:

$$E\{V_i\} = 0$$

Sotto queste ipotesi calcoliamo la potenza (P) associata al segnale somma $V = V_1 + V_2$:

$$\begin{aligned} P &= \text{cost. } E\{V^2\} \\ &= \text{cost. } \left(E\{(V_1 + V_2)^2\} \right) \\ &= \text{cost. } \left(E\{V_1^2\} + E\{V_2^2\} + 2E\{V_1 V_2\} \right) \\ &= \text{cost. } (P_1 + P_2 + 2E\{V_1\}E\{V_2\}) \\ &= \text{cost. } (P_1 + P_2) \end{aligned} \tag{F.1}$$

Pertanto la potenza della somma di segnali WSS scorrelati può essere calcolata come somma delle potenze di ogni singolo segnale.

Appendice G

Brillanza

Ricordiamo che le modalità con cui può avvenire scambio di energia termica fra due corpi sono di tre tipi fondamentali e nella pratica, all'interno di uno stesso processo di scambio termico, in genere si riscontrano tutti e tre; queste tre categorie vanno sotto il nome di: *conduzione*, *convezione* e *irraggiamento*¹. Mentre i primi due si sviluppano solo in presenza di mezzi materiali, il terzo può avvenire anche nel vuoto in quanto legato a fenomeni di propagazione di onde elettromagnetiche.

L'irraggiamento è dunque un fenomeno dovuto all'emissione di energia (detta *calore radiante*), sotto forma di onde elettromagnetiche, da parte di un corpo. La natura e la temperatura di quest'ultimo sono i fattori che determinano l'intensità della radiazione emessa: quanto più elevata è la temperatura della sorgente di energia tanto più significativa sarà la radiazione da essa prodotta. Se la temperatura del corpo emittente è costante nel tempo, questa emissione di calore radiante è continua (cioè il flusso di energia termica uscente dal corpo si mantiene costante nel tempo); in tal caso si parla di stato di *equilibrio termodinamico* della sorgente termica. L'energia irradiata dalla sorgente, infine, può investire un altro corpo e da questo venirne completamente assorbita o in parte riemessa.

Volendo ora quantificare l'energia scambiata fra corpi per irraggiamento, definiamo il *potere emissivo* (R) come la quantità di energia (dE_{irr}) che viene emessa nell'unità di tempo (dt) e nell'intervallo spettrale di ampiezza ($d\lambda$) dall'unità di superficie ($d\Sigma$) del corpo che emette la radiazione:

$$dE_{irr} = R d\Sigma dt d\lambda \quad (G.1)$$

analoga definizione vale per l'*illuminamento raggianti* (H) corrispondente invece all'energia incidente sul corpo (dE_{inc}):

$$dE_{inc} = H d\Sigma dt d\lambda \quad (G.2)$$

e moltiplicando per α (coefficiente di assorbimento) ricaviamo la quantità di energia incidente che viene assorbita dal corpo:

$$dE_{ass} = \alpha H d\Sigma dt d\lambda \quad (G.3)$$

Un caso di rilevante interesse è l'emissione e l'assorbimento di energia da parte del *corpo nero* (*black-body*, BB); questo è un sistema capace di assorbire tutte le radiazioni elettromagnetiche (a tutte le frequenze) da cui è investito. In natura però tutti i corpi sottoposti a una radiazione

¹ C.Boffa e P.Gregorio, *Elementi di fisica tecnica*, Levrotto & Bella, 1984, Parte quinta

elettromagnetica in parte assorbono (secondo quanto precisato prima) e in parte riflettono (sotto ben precise frequenze) tale radiazione, pertanto il corpo nero è soltanto un modello utile che permette di semplificare lo studio del fenomeno dell'irraggiamento.

Un grandezza fisica particolarmente usata nelle telecomunicazioni per descrivere l'emissione di energia da parte di un corpo nero è la *brillanza*; questa è definita come²:

la quantità di energia (dE) irradiata dal corpo nell'unità di tempo (dt) e nell'unità di banda (df) attraverso l'unità di superficie ($d\Sigma_{BB}$), sottesa dall'angolo solido ($d\Omega$):

$$dE = B \cos\theta d\Sigma_{BB} d\Omega dt df \quad (G.4)$$

Per ricavare l'espressione esplicita della brillantezza per un corpo nero si ricorre ad alcuni risultati noti dalla meccanica quantistica. In particolare si assume il corpo nero come un sistema contenente particelle (*fotoni*) che vengono suddivise, a seconda dell'energia da esse posseduta, in vari sottosistemi detti *livelli energetici*; ciascun livello energetico è popolato dunque da fotoni aventi tutti la stessa energia (E_i) data da:

$$E_i = h \cdot f_i \quad (G.5)$$

dove $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ (J s) è la *costante di Planck* e f_i è la frequenza di oscillazione del generico fotone. Tutti i fotoni dell' i -esimo livello, oscillando alla frequenza f_i , generano onde elettromagnetiche caratterizzate dalla frequenza f_i stessa e da una certa direzione di propagazione $\hat{k}_i$; le onde dovute a ciascun livello di energia contribuiscono tutte alla formazione della radiazione emessa dal corpo nero.

Volendo ora quantificare il numero medio ($\bar{n}$) di fotoni del sistema, che vibrano tutti alla stessa frequenza f e appartenenti allo stesso livello energetico, applichiamo la *statistica di Bose-Einstein* (supponendo che il BB sia all'equilibrio termodinamico) da cui:

$$\bar{n} = \frac{2}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \quad (G.6)$$

dove T è la temperature di corpo nero e $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ (J s) è la *costante di Boltzmann*; mediante ulteriori considerazioni geometriche e di meccanica quantistica, si ricava l'energia emessa attraverso l'elemento di superficie $d\Sigma_{BB}$ da tutti i fotoni alla stessa frequenza f che vibrando generano un'onda elettromagnetica piana nella direzione $\hat{k}$ (individuata dall'angolo solido $d\Omega$) (vedi Fig. G.1 e Fig. G.2):

$$dE = \frac{2}{\lambda^2} \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \cos\theta d\Sigma_{BB} d\Omega dt df \quad (G.7)$$

Se a questo punto volessimo determinare la radiazione complessiva emessa dal BB , dovremmo considerare tutte le possibili direzioni di irradiazione $\hat{k}$ (e quindi integrare la (G.7) sull'angolo solido 2π , che individua la superficie di irradiazione (Σ_{BB}) del corpo nero). Tuttavia il nostro studio è incentrato su quella parte di radiazione di BB che incide su un'antenna in ricezione e, poiché i parametri in ricezione sono definiti per incidenza di onda piana, dovremo considerare un'unica direzione di propagazione ($\hat{k}$) della radiazione emessa: quella corrispondente al collegamento diretto fra BB e antenna ricevente; in altri termini la radiazione a cui siamo interessati è proprio quella specificata dalla (G.7) (vedi Fig. G.3).

²cfr. J.D.Kraus, *Radio astronomy*, 2nd.ed., Cygnus-Quasar Books, 1986

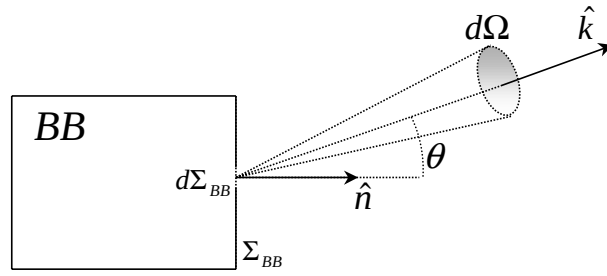


Figura G.1. Radiazione emessa dal corpo nero: Σ_{BB} è la superficie di emissione del BB ; $d\Sigma_{BB}$ è l'elemento di superficie; $\hat{k}$ è la direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica; $\hat{n}$ è il versore normale alla superficie di emissione; θ è l'angolo individuato dalla direzione di propagazione rispetto alla normale alla superficie Σ_{BB}

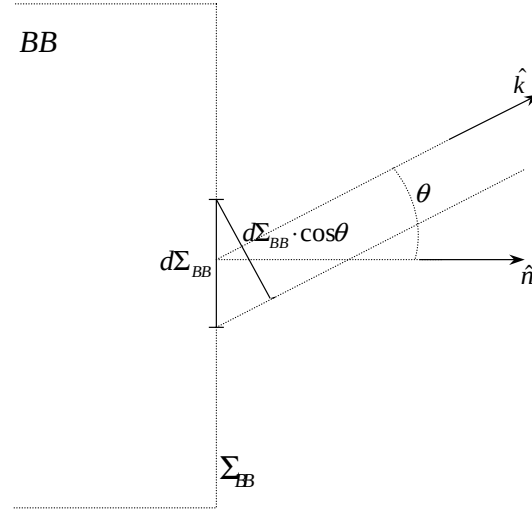


Figura G.2. Costruzione geometrica: Σ_{BB} è la superficie di emissione del BB ; $d\Sigma_{BB}$ è l'elemento di superficie; $d\Sigma_{BB} \cdot \cos\theta$ è $d\Sigma_{BB}$ visto dalla direzione $\hat{k}$

Dalle considerazioni fatte e dalla (G.7) si ricava che:

$$dE = \frac{2}{\lambda^2} \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} d\Sigma d\Omega dt df \quad (G.8)$$

dove $d\Sigma$ è ora l'elemento di superficie dello spazio circostante l'antenna ricevente, che coincide con la superficie di emissione del BB , in quanto questo è visto come puntiforme dall'antenna in ricezione. Da questa equazione, confrontando con la (G.4), si ottiene l'espressione della brillantezza associata alla radiazione di corpo nero, osservato da un'antenna ricevente in campo lontano:

$$B(f, T) = \frac{2}{\lambda^2} \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \quad (G.9)$$

Quando vale l'approssimazione di *Rayleigh-Jeans*:

$$\frac{hf}{k_B T} \ll 1 \quad (G.10)$$

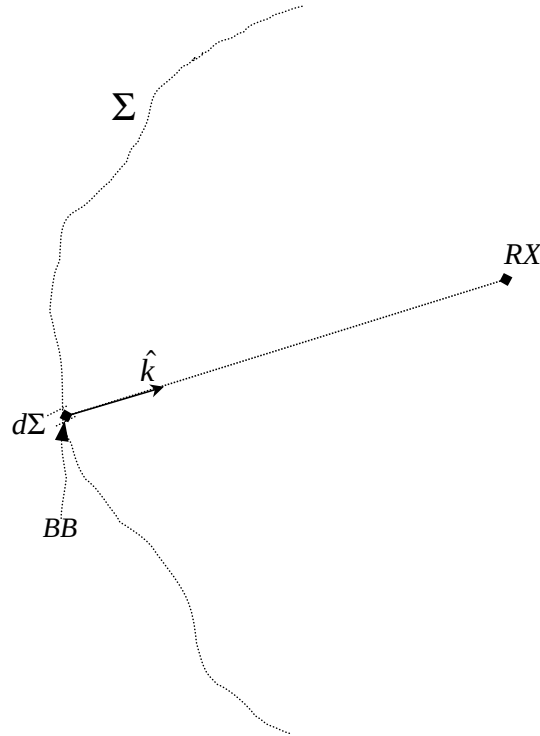


Figura G.3. Collegamento diretto BB-antenna ricevente: Σ delinea lo spazio circostante l'antenna; $d\Sigma$ individua il BB; RX è l'antenna ricevente; $\hat{k}$ è la direzione che collega il BB (elementare) considerato e l'antenna ricevente

sviluppando in serie di Mc Laurin l'esponenziale della (G.9), si ricava:

$$B(f, T) \simeq \frac{2}{\lambda^2} k_B T \quad (\text{G.11})$$

Appendice H

Termini tecnici

Con la finalità di rendere maggiormente agevole la consultazione di pubblicazioni in lingua inglese concernenti gli argomenti trattati in questi Appunti, sono riportate di seguito due tabelle con i termini tecnici usati più di frequente e di maggiore interesse pratico ai fini delle applicazioni.

Inglese	Italiano
<i>Biconical Antenna</i>	Antenna biconica
<i>Short Dipole Antenna</i>	Antenna a dipolo corto
<i>Half-Wave Dipole Antenna</i>	Antenna a dipolo a mezz'onda
<i>Monopole Antenna</i>	Antenna a monopolo
<i>Antenna Arrays</i>	Schiere di antenne
<i>Wire Antenna</i>	Antenna filare
<i>Aperture-Type Antenna</i>	Antenna ad apertura
<i>Microstrip Antenna</i>	Antenna in microstriscia
<i>Open Waveguides</i>	Guide d'onda aperte
<i>Horn Antenna</i>	Antenna a tromba
<i>Corner Reflector</i>	Riflettore ad angolo
<i>Reflector Antenna</i>	Antenna a riflettore

Tabella H.1. Tipologie di antenne.

Inglese	Italiano
<i>Bandwidth</i>	Larghezza di banda
<i>Directivity</i>	Direttività
<i>Gain</i>	Guadagno
<i>Aperture efficiency</i>	Efficienza d'apertura o fattore di utilizzazione di bocca
<i>Polarization</i>	Polarizzazione
<i>Equivalent Isotropic Radiated Power (EIRP)</i>	Potenza equivalente irradiata isotropicamente
<i>Beamwidth</i>	Larghezza del fascio
<i>Half Power Beam Width (HPBW)</i>	Larghezza di banda a 3 dB
<i>First Null Beam Width (FNBW)</i>	Larghezza di banda al primo zero
<i>Beam shape</i>	Forma del fascio
<i>Beam scanning</i>	Scansione del fascio (nelle schiere)
<i>Radiation pattern</i>	Diagramma d'irradiazione
<i>Sidelobes</i>	Lobi secondari
<i>Tapering</i>	Rastrematura
<i>Effective area</i>	Area equivalente
<i>Effective length</i>	Altezza efficace
<i>Polarization mismatch factor</i>	Disadattamento di polarizzazione
<i>Array factor</i>	Fattore di schiera
<i>Thermal Noise</i>	Rumore termico
<i>Noise Figure</i>	Cifra di rumore
<i>Noise temperature</i>	Temperatura di rumore

Tabella H.2. Parametri d'antenna.